

ISSN 2221-3198

ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА ЮГА РОССИИ

№ 4 / 2018



УДК 528.23

DOI:10.23671/VNC.2018.4.20136

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА S-АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ РЕЛЬЕФА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2018 И. А. Керимов¹, д. ф.-м. н., проф., И. Э. Степанова¹, д. ф.-м. н.,
Д. Н. Раевский¹, к. ф.-м. н., А. В. Щепетиллов², д. ф.-м. н.

¹ ФГБУН Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Россия, 123995, г.
Москва, ул. Б. Грузинская, 10, стр. 1, e-mail: kerimov@ifz.ru;

² ФГБОУВО Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, 1

В статье рассмотрены результаты исследований возможностей метода S-аппроксимации при построении аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности. Получены аналитические аппроксимации для различных типов рельефов местности (равнины, холмы и горы) и топографических данных разного масштаба. Для каждого из типов рельефа выполнена оценка точности аппроксимации и разработаны соответствующие рекомендации по выбору параметров модели.

Ключевые слова: интегральные представления, S-аппроксимации, рельеф, СЛАУ, погрешность.

Введение

В настоящее время весьма актуальным является разработка и внедрение новых способов описания рельефа (топографии) поверхности Земли. Речь идет об использовании более мощных и гибких методов аналитического представления поверхности Земли на достаточно больших по площади территориях по данным значений высот большого количества точек $\xi_3(\xi_1, \xi_2)$, используемых при решении широкого круга задач геодезии, геологии и геофизики. Для построения аналитических аппроксимаций рельефа одним из наиболее эффективных инструментов является метод линейных интегральных представлений В. Н. Страхова [Страхов, 1995; Страхов и др., 2009].

Построение аналитических аппроксимаций функции $\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ следует выполнять методом линейных интегральных представлений, исходя из следующего фундаментального факта: функция, непрерывная (либо даже из более общего класса $L_2(-\infty, +\infty)$ функций, с суммируемым квадратом на плоскости переменных (x_1, x_2)) на произвольной горизонтальной плоскости (плоскости переменных (ξ_1, ξ_2)) может рассматриваться как предельные значения некоторой функции трех переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , гармонической в полупространстве $\xi_3 < 0$, верхнем к заданной горизонтальной плоскости [Керимов, 2009, 2011; Страхов и др., 2002].

В качестве интегральных представлений функции рельефа $\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ могут использоваться, основанные на представлении интегралом Фурье (метод F-аппроксимации) и суммой потенциалов простого и двойного слоев, залегающих

ниже заданного рельефа (метод S-аппроксимации), для которых в настоящее время разработаны теоретические основы, алгоритмы и компьютерные технологии [Керимов, 2009, 2011; Раевский, 2016; Раевский, Степанова, 2015а, б; Степанова и др., 2016; Страхов, 1995; Страхов, Керимов, 2001; Страхов, Степанова, 2002; Страхов и др., 2002, 2009].

В данной статье представлены результаты исследования возможностей метода S-аппроксимации при построении аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности для разнообразных геоморфологических типов и различных масштабов исходных материалов и соответственно точности исходных данных.

Метод S-аппроксимации состоит в аппроксимации заданной величины (в данном случае вертикальной координаты, характеризующей рельеф земной поверхности) суммой простого и двойного слоев, залегающих ниже заданного рельефа. В рамках этой методики решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) больших размерностей (соразмерно общему количеству измерений), поэтому основным вычислительным этапом является именно решение СЛАУ [Раевский, 2016; Раевский, Степанова, 2015а, б; Степанова и др., 2016; Страхов, Степанова, 2002; Страхов и др., 2002, 2009].

Основными гиперпараметрами (которые подбираются вручную) S-аппроксимационной модели являются:

- 1) общее количество плоскостей, являющихся носителями простого и двойного слоев, которые будут аппроксимировать рельеф;
- 2) глубина залегания каждой из плоскостей (под глубиной в данной задаче мы понимаем расстояние от минимальной высотной отметки до соответствующей плоскости).

Так как исходные измерения всегда даны с некоторой погрешностью, необходимо также ввести верхнюю (δ_{\max}) и нижнюю (δ_{\min}) границы нормы невязки, чтобы задача была решена с требуемой точностью. Константы можно определить исходя из точности измерений по следующим формулам:

$$\delta_{\min}^2 = N\sigma_{\min}^2, \quad \delta_{\max}^2 = N\sigma_{\max}^2,$$

где N – общее количество измерений,

σ_{\min} – нижняя оценка среднеквадратического отклонения (СКО),

σ_{\max} – верхняя оценка среднеквадратического отклонения (СКО).

Например, если известно, что погрешность измерений составляет приблизительно 20 см (0,2 м), то можно выбрать $\sigma_{\min} = 0.1$, $\sigma_{\max} = 0.3$ и далее решать задачу.

Для изучения возможностей S-аппроксимации для аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности было разработано программное обеспечение (ПО), которое включает в себя следующие программы:

- 1) RegCheb – программа по нахождению устойчивого приближенного решения СЛАУ регуляризованным итерационным методом Чебышева;
- 2) ВСМ – программа по нахождению устойчивого приближенного решения блочным методом контрастирования с использованием регуляризованного метода Чебышева;
- 3) NeighEst – вычисление высот в произвольной сетки точек на основе полученных решений программами RegCheb и ВСМ (сеть можно сгущать или решать задачи с пробелами в данных).

Для исследований возможностей метода S-аппроксимации для построения аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности для различных геоморфологических условий были использованы топографические данные для трех типов:

равнинная, холмистая и горная местности, по 4 файла на каждый тип. От показателя перепада высот зависит выбор параметров модели: чем более резкий рельеф, тем труднее аппроксимация – нужно больше итераций для достижения необходимой точности.

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ РЕЛЬЕФОВ

Для равнинной и холмистой местности перепад высот не такой значительный и в этом случае возможна практически с любой точностью (даже с миллиметровой, если требуется). Горы же аппроксимировать гораздо труднее в связи с наличием множества резких подъемов. В настоящей статье представлены результаты расчетов для каждого из трех типов рельефа: равнинная, холмистая и горная местность. Для каждого типа были рассмотрены несколько вариантов S-аппроксимационных моделей с различными исходными параметрами, а именно варьировалось общее число исходных плоскостей и их глубина залегания. Все вычисления проводились на компьютере Intel i7-4700HQ с частотой 2,4 ГГц.

1.1. Равнинная местность

Для апробации алгоритма на равнинной местности была выбрана территория размером 570×580 метров с шагом 5 м. Общее количество пунктов измерений $N=13340$. Были выбраны следующие границы для нормы невязки: $\delta_{\min}^2 = 100$, $\delta_{\max}^2 = 600$. Ниже приведем результаты S-аппроксимации для 4 различных моделей.

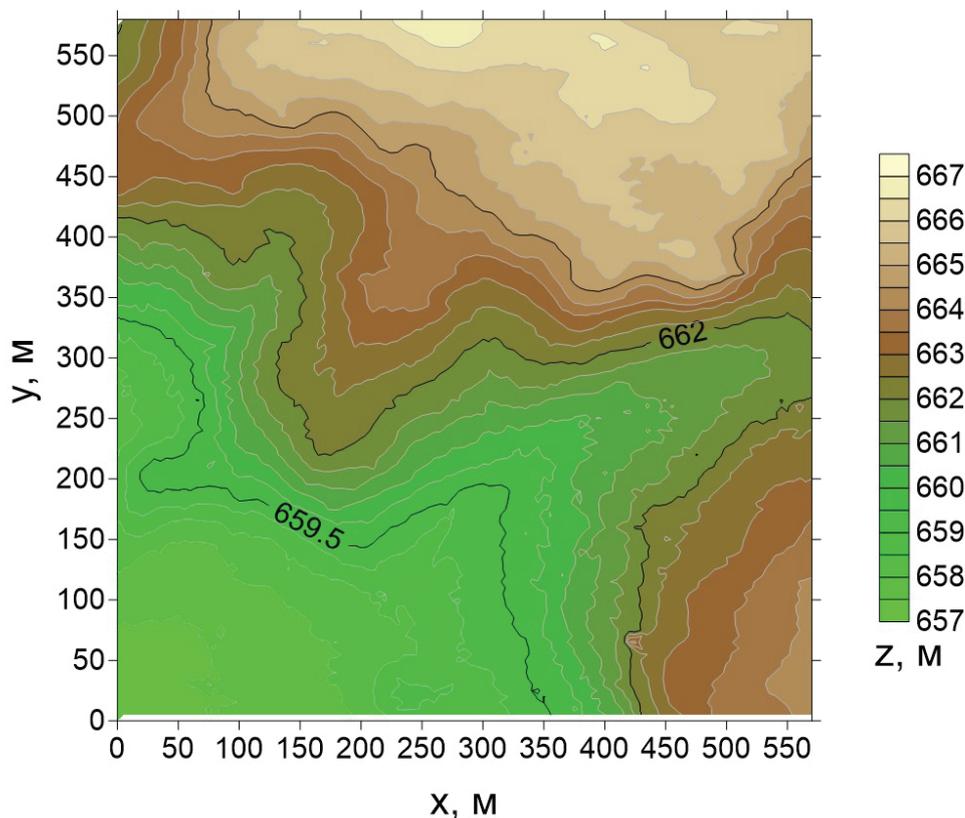


Рис. 1. Равнинная местность. Карта изолиний рельефа поверхности.

Таблица 1.

Равнинная местность. Результаты S-аппроксимации рельефа.

N	σ_{\min} , м	σ_{\max} , м	$\frac{H_{\min}-M}{H_{\max}}$, м	Модель	n	σ_0 , м	ΔH , м	Δt
13340	0.0865	0.2121	$\frac{657}{667}$	Mod_1	7	0,1024	0,9409	$\frac{1,4707 \cdot 10^{-4}}{1:31:09}$
				Mod_2	7	0,1022	0,94	$\frac{1,4785 \cdot 10^{-4}}{0:50:14}$
				Mod_3	1	0,1454	1,5932	$\frac{2,0439 \cdot 10^{-4}}{0:46:55}$
				Mod_4	1	0,1184	1,2111	$\frac{1,6657 \cdot 10^{-4}}{0:39:49}$

Приняты следующие обозначения:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}, \quad \sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}},$$

H_{\max} , H_{\min} – максимальное и минимальное значения высотных отметок;

Модель – название соответствующей модели (R – общее количество плоскостей, H_r – глубина залегания плоскости r):

Mod_1: $R=2$, $H_1 = 25$ м, $H_2 = 40$ м;

Mod_2: $R=5$, $H_1 = 25$ м, $H_2 = 30$ м, $H_3 = 35$ м, $H_4 = 40$ м, $H_5 = 45$ м;

Mod_3: $R=2$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 30$ м;

Mod_4: $R=5$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 20$ м, $H_3 = 25$ м, $H_4 = 30$ м, $H_5 = 40$ м;

n – количество пробных решений – под пробным решением понимается устойчивое приближенное решение, норма невязки для которого находится в заданных границах, усреднение множества пробных решений составляют результирующее решение;

$$\sigma_0 = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\sqrt{N}} \text{ – среднеквадратическое отклонение;}$$

f_{σ} – вектор значений вертикальной координаты, характеризующей топографию,
 A – матрица СЛАУ;

x – найденное решение СЛАУ;

$\| \cdot \|_E$ – евклидова норма);

ΔH – максимальное расхождение между аппроксимированным и реально заданным значениями высоты;

$$\Delta = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\|f_{\delta}\|_E} \text{ – показатель качества решения;}$$

t – время решения СЛАУ (часы: минуты: секунды).

Как видно из результатов (см. табл. 1), все модели смогли найти решение с заданной точностью за разумное время (менее 1,5 часов). Среднеквадратическое отклонение для всех трех вариантов менее 15 см, а максимальное расхождение менее 1,6 м. Однако при этом для моделей, где глубина первого носителя была относительно малой (Mod_3 и Mod_4, $H_1 = 15$ м), результирующее решение было найдено всего по совокупности одного пробного решения ($n = 1$), что является нека-

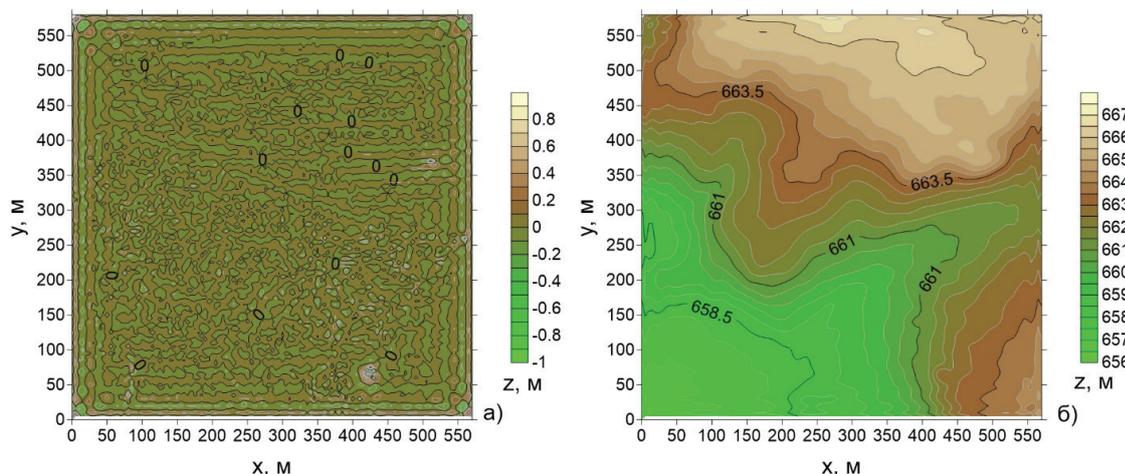


Рис. 2. Равнинная местность. Mod_2

- а) карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом;
 б) карта изолиний рельефа, полученная с помощью S-аппроксимации.

чественным результатом из-за трудного подбора параметра регуляризации в этом случае. Для моделей же Mod_1 и Mod_2 было найдено по 7 пробных решения для формирования результирующего решения. При этом для моделей, где глубина первого носителя одинакова, отдается предпочтение модели с большим количеством аппроксимирующих плоскостей, так как в этом случае вычислительное время значительно сокращается, а качество решения не ухудшается: это подтверждают приблизительно одинаковые результаты для моделей Mod_3-Mod_4 и Mod_1-Mod_2. На рисунке 2 представлены результаты аппроксимации для модели Mod_2. Форма рельефа сохранилась, устранив помеху в измерениях.

Вывод: для равнинных областей, где шаг сетки относительно небольшой ($\Delta h \leq 15$ м) аппроксимацию необходимо производить с достаточным удалением первой залегающей плоскости от минимальной высотной отметки ($5\Delta h \leq H_1 \leq 7\Delta h$, где Δh – шаг сетки). Глубина последней плоскости должна быть не более $4(h_{\max} - h_{\min})$, где $h_{\max} - h_{\min}$ – разность между максимальным и минимальным значениями высоты. В этом случае получаются наиболее устойчивые качественные решения за разумное вычислительное время.

1.2. Холмистая местность

Для апробации алгоритма на холмистой местности была выбрана область размером 580×580 метров с шагом 5 м. Общее количество пунктов измерений $N=13573$. Были выбраны следующие границы для нормы невязки: $\delta_{\min}^2 = 100$, $\delta_{\max}^2 = 600$.

Ниже приведем результаты S-аппроксимации для 4 различных моделей.

Mod_1: $R=3$, $H_1 = 20$ м, $H_2 = 40$ м, $H_3 = 80$ м;

Mod_2: $R=7$, $H_1 = 20$ м, $H_2 = 30$ м, $H_3 = 40$ м, $H_4 = 50$ м, $H_5 = 60$ м, $H_6 = 70$ м, $H_7 = 80$ м;

Mod_3: $R=3$, $H_1 = 35$ м, $H_2 = 55$ м, $H_3 = 80$ м;

Mod_4: $R=7$, $H_1 = 35$ м, $H_2 = 40$ м, $H_3 = 50$ м, $H_4 = 60$ м, $H_5 = 70$ м, $H_6 = 80$ м, $H_7 = 90$ м;

Таблица 2.

Холмистая местность. Результаты S-аппроксимации рельефа

N	σ_{\min} , М	σ_{\max} , М	$\frac{H_{\min}-M}{H_{\max}-M}$	Модель	n	σ_0 , М	ΔH , м	$\frac{\Delta}{t}$
13573	0.0858	0.2103	$\frac{257}{274}$	Mod_1	1	0.2081	1,5778	$\frac{7.853 \cdot 10^{-4}}{0:30:12}$
				Mod_2	10	0,0916	1,6192	$\frac{3,458 \cdot 10^{-4}}{0:58:27}$
				Mod_3	10	0,1232	1,5055	$\frac{4,6494 \cdot 10^{-4}}{0:38:22}$
				Mod_4	10	0,1309	1,5151	$\frac{4,9401 \cdot 10^{-4}}{0:38:29}$

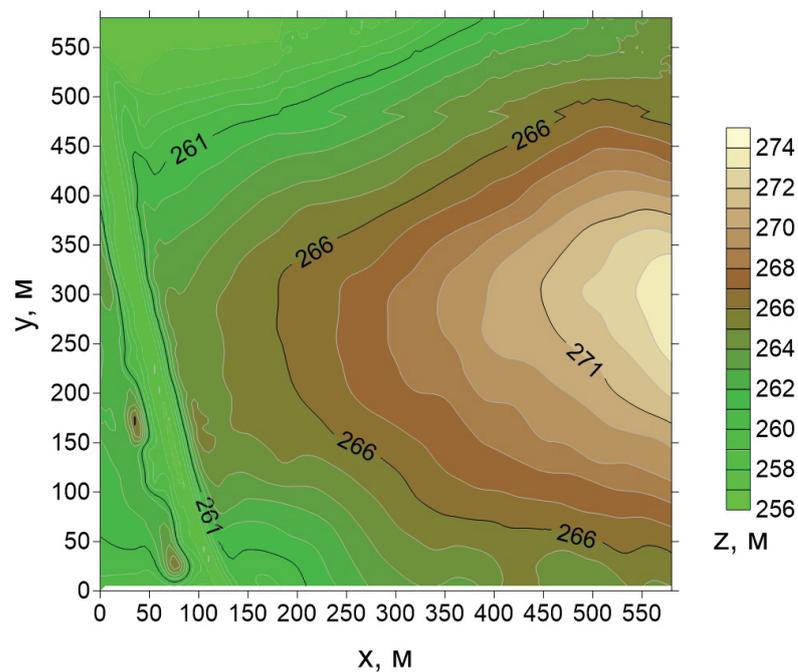


Рис. 3. Холмистая местность.
Карта изолиний рельефа поверхности.

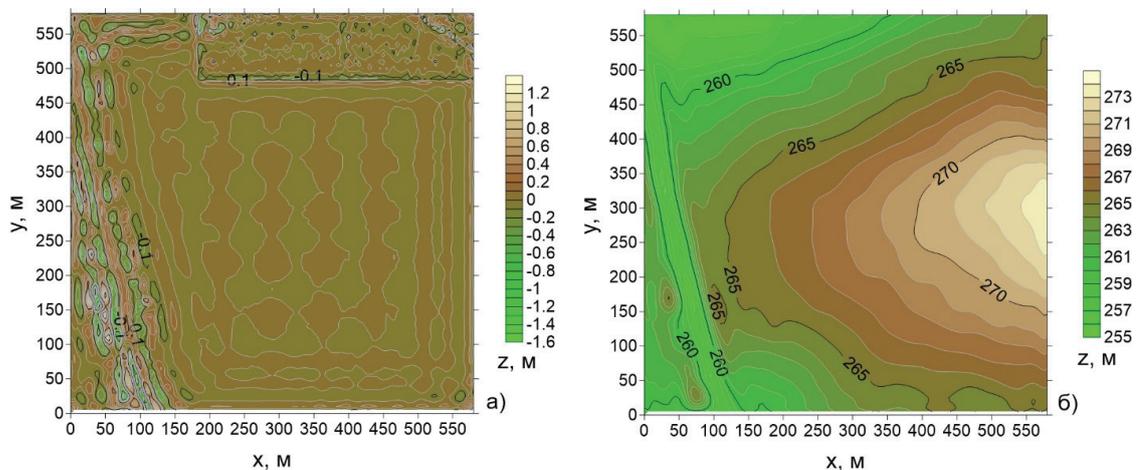


Рис. 4. Холмистая местность. Mod_3
а) карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом;
б) карта изолиний рельефа, полученная с помощью S-аппроксимации.

Как видно из результатов (см. табл. 2), все модели смогли найти решение с заданной точностью за разумное время (менее 40 минут). Среднеквадратическое отклонение Mod_2, Mod_3, Mod_4 менее 14 сантиметров, но при этом для Mod_2 расхождение ΔH максимально. Связано это со слишком близким расположением первой аппроксимирующей плоскости, поэтому результаты для Mod_1, Mod_2 менее устойчивые, чем для Mod_3, Mod_4. При этом для моделей, где глубина первого носителя одинакова, не следует выбирать глубину последней плоскости слишком большой, но все так же отдается предпочтение моделям с несколькими плоскостями. На рис. 4 представлены результаты аппроксимации для модели Mod_3. Наибольшие отклонения наблюдаются вдоль «траншеи» в западной части (см. рис. 4а).

Вывод: для холмистых областей с шагом сетки $\Delta h \leq 15$ следует исходить из тех же соображений, что и для равнинных областей – аппроксимацию необходимо производить с достаточным удалением первой залегающей плоскости от минимальной высотной отметки ($5\Delta h \leq H_1 \leq 7\Delta h$, где Δh – шаг сетки). Глубина последней плоскости должна быть не более $4(h_{\max} - h_{\min})$.

1.3. Горная местность

Для апробации алгоритма на горной местности была выбрана область из предоставленных заказчиком размером 600×600 метров с шагом 5 м. Общее количество пунктов измерений $N=14641$. Были выбраны следующие границы для нормы невязки: $\delta_{\min}^2 = 200$, $\delta_{\max}^2 = 1300$. Ниже приведем результаты S-аппроксимации для 5 различных моделей.

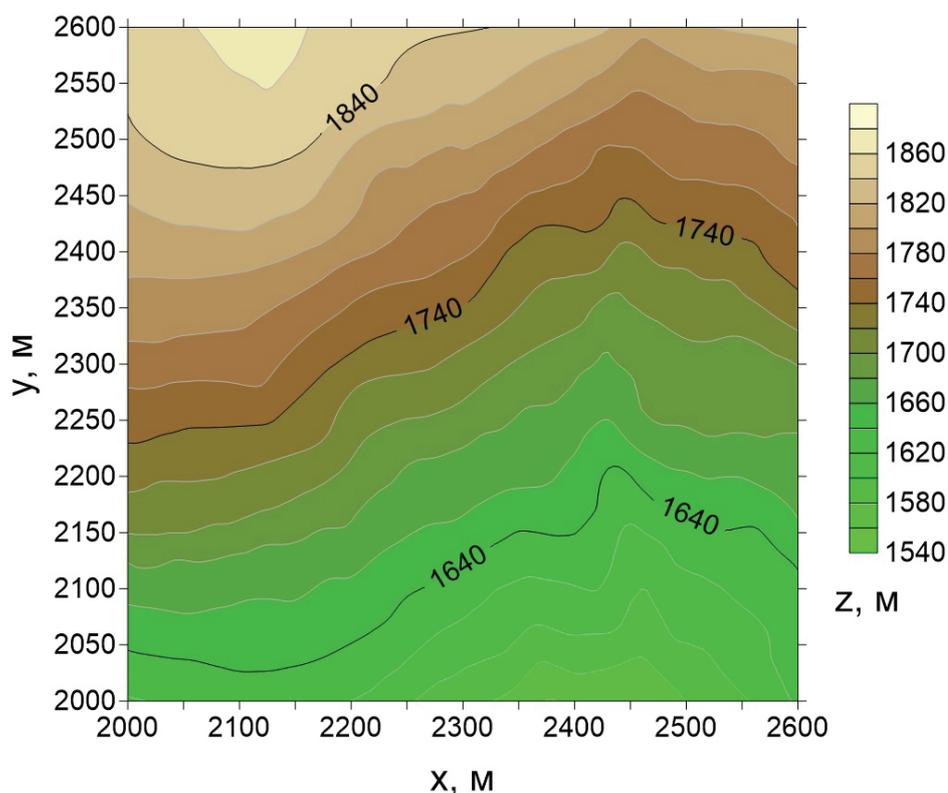


Рис. 5. Горная местность.
Карта изолиний рельефа поверхности.

Таблица 3.

Горная местность. Результаты S-аппроксимации рельефа.

N	σ_{\min} , М	σ_{\max} , М	$\frac{H_{\min}-M}{H_{\max}-M}$	Модель	n	σ_0 , М	ΔH , м	$\frac{\Delta}{t}$
14641	0,1169	0,298	$\frac{1563}{1866}$	Mod_1	7	0,1369	1,874	$\frac{7,9414 \cdot 10^{-5}}{1:07:48}$
				Mod_2	6	0,1459	2,0692	$\frac{8,4662 \cdot 10^{-5}}{1:28:28}$
				Mod_3	10	0,1929	3,315	$\frac{1,119 \cdot 10^{-4}}{0:48:44}$
				Mod_4	10	0,1923	3,1085	$\frac{1,1157 \cdot 10^{-4}}{0:50:18}$
				Mod_5	10	0,2118	3,5672	$\frac{1,3748 \cdot 10^{-4}}{5:31:29}$

Mod_1: $R=7$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 25$ м, $H_3 = 40$ м, $H_4 = 70$ м, $H_5 = 120$ м, $H_6 = 170$ м, $H_7 = 250$ м;

Mod_2: $R=2$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 200$ м;

Mod_3: $R=7$, $H_1 = 25$ м, $H_2 = 40$ м, $H_3 = 70$ м, $H_4 = 120$ м, $H_5 = 150$ м, $H_6 = 190$ м, $H_7 = 250$ м;

Mod_4: $R=2$, $H_1 = 25$ м, $H_2 = 250$ м;

Mod_5: $R=6$, $H_1 = 45$ м, $H_2 = 70$ м, $H_3 = 100$ м, $H_4 = 140$ м, $H_5 = 180$ м, $H_6 = 240$ м;

Результаты вычисления показывают, что наилучшим образом аппроксимация удается для моделей, где глубина первой плоскости относительно невысокая (см. табл. 3): для моделей Mod_1, Mod_2 среднее квадратическое и максимальное отклонения минимальны. При этом также отдается предпочтение моделям с большим количеством аппроксимирующих плоскостей. Если же глубину первой плоскости выбирать достаточно большой, аппроксимация занимает гораздо больше времени (Mod_5). Однако стоит отметить, что при этом все модели сумели с высокой точностью аппроксимировать участок горного рельефа. На рис. 6 представлены результаты аппроксимации для модели Mod_1.

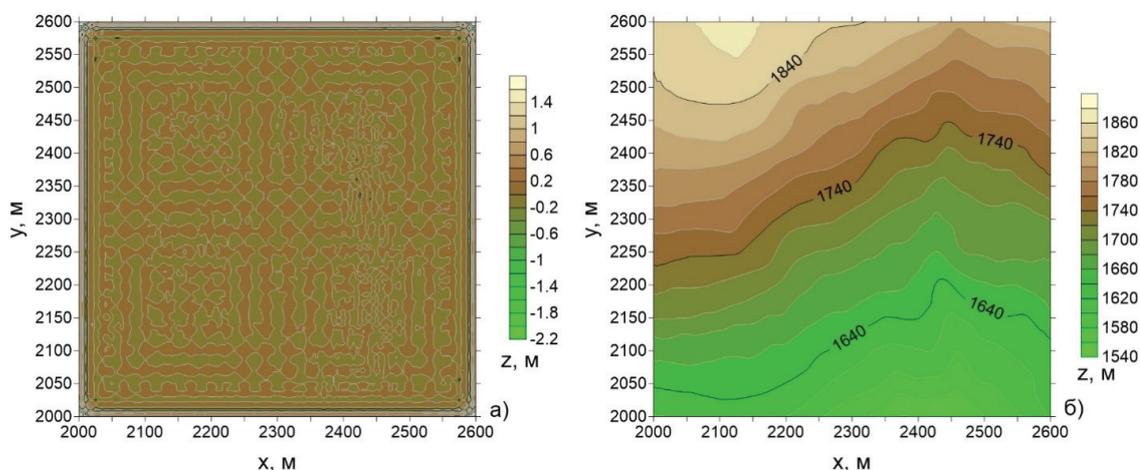


Рис. 6. Горная местность. Mod_1

- а) карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом;
б) карта изолиний рельефа, полученная с помощью S-аппроксимации.

Вывод: для горной местности глубину первой плоскости стоит выбирать меньшую, чем для равнин и гор ($2\Delta h \leq H_1 \leq 5\Delta h$, где Δh – шаг сетки). Глубина последней плоскости должна быть не более $2(h_{\max} - h_{\min})$. так как на горном участке эта разность велика.

II. Исследование моделей различного масштаба

В настоящем отчете представлены результаты счета для каждого из трех типов областей (равнины, холмы, горы) для моделей различного масштаба:

I. Территория площадью 575×575 метров, шаг сетки $h=5$ метров, исходное количество точек, по которым строится аппроксимация, $N=13456$ точек;

II. Территория площадью 3500×3500 метров, шаг сетки $h=35$ метров, исходное количество точек, по которым строится аппроксимация, $N=13168$ точек; территория, для которой по аппроксимационной конструкции восстанавливаются высоты, 3500×3500 метров, шаг сетки $h=5$ метров, количество точек, по которым восстанавливаются значения высот, $M=641601$;

III. Территория площадью 7000×7000 метров, шаг сетки $h=60$ метров, исходное количество точек, по которым строится аппроксимация, $N=13689$ точек; территория, для которой по аппроксимационной конструкции восстанавливаются высоты, 7000×7000 метров, шаг сетки $h=5$ метров, количество точек, по которым восстанавливаются значения высот, $M=1962801$.

Все вычисления проводились на компьютере Intel i7-4700HQ с частотой 2,4 ГГц. Далее во всех таблицах, где указаны результаты аппроксимаций, и на рисунках римскими цифрами I, II или III указываются соответствующие модели согласно описанию выше.

2.1. Модель I. Равнинная местность

Апробация алгоритма на равнинной местности проводилась на территории, рекомендованной заказчиком. Были выбраны площади соответствующих размеров и масштабы построения. Верхнюю границу σ_{\max} для среднеквадратического отклонения σ_0 немного увеличивали при увеличении масштаба модели. Это необходимо для достижения более устойчивого решения, так как при увеличении шага сетки ухудшается и обусловленность исходной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую необходимо решить в рамках метода S-аппроксимаций. Ниже приведен результаты, полученные на аппроксимируемом участке для каждой из областей.

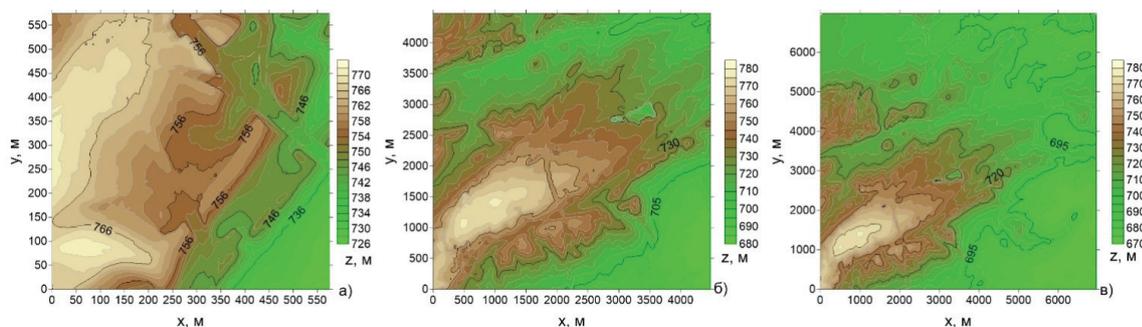


Рис. 7. Равнинная местность.

Карта изолиний рельефа: а) модель I; б) модель II; в) модель III.

Таблица 4.

Равнинная местность. Результаты S-аппроксимации рельефа по точкам, использующимся для построения аппроксимации.

№	N	σ_{\min} , м	σ_{\max} , м	$\frac{H_{\min}-M}{H_{\max}}$, м	Модель	n	σ_0 , м	ΔH , м	$\frac{\Delta}{t}$
I	13456	0,1219	0,2112	$\frac{726}{772}$	Mod_1	10	0,195	3,6131	$\frac{2,5826 \cdot 10^{-4}}{0:47:04}$
II	13168	0,1232	0,2465	$\frac{680}{780}$	Mod_2	10	0,243	3,2133	$\frac{3,3161 \cdot 10^{-4}}{4:22:59}$
III	13689	0,1209	0,2703	$\frac{670}{780}$	Mod_3	10	0,2628	3,3125	$\frac{3,6948 \cdot 10^{-4}}{0:46:55}$

Mod_1: $R=3$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 25$ м, $H_3 = 40$ м;

Mod_2: $R=1$, $H_1 = 80$ м;

Mod_3: $R=1$, $H_1 = 140$ м;

Как видно из результатов построения аппроксимации, скорость сходимости снижается при увеличении шага сетки (время счета увеличивается) и, соответственно, размеров территории. При этом качество аппроксимации по исходным точкам почти не падает – среднеквадратическое отклонение (СКО) и максимальное отклонение ΔH остаются приблизительно на одном и том же уровне. Для моделей большего масштаба **II**, **III** проверим качество построенной аппроксимации по всем точкам.

Таблица 5.

Равнинная местность. Результаты S-аппроксимации рельефа по всем точкам

	M	Модель	σ_0^* , м	ΔH^* , м
II	641601	Mod_2	0,6173	14,2832
III	1962801	Mod_3	0,7891	30,1819

Здесь M – количество точек, в которых восстанавливались высоты по построенной аппроксимации по N точкам, σ_0^* – вычисленное среднеквадратическое отклонение по этим точкам, ΔH^* – максимальное отклонение. Результаты построения аппроксимации по всем точкам показывают вполне неплохие результаты для равнины. В случае восстановления высот в 1962801 точках, СКО увеличилось всего менее, чем в 3 раза. Но при этом максимальное отклонение намного увеличилось – для модели **II** почти в 5 раз, а для модели **III** почти в 10 раз. Это говорит о том, что некоторые резкие локальные поднятия в рельефе, которые не были учтены при построении аппроксимации из-за усечения исходного объема выборки, привносят существенный вклад в ошибку. Ниже представлена карта разности по M точкам исходного рельефа и построенного с помощью S-аппроксимации

Видно, что за исключением локальных перепадов высот, ошибка достаточно равномерная.

Вывод: для равнинных областей, где шаг сетки достаточно высокий ($\Delta h > 15$ м) аппроксимацию необходимо производить с меньшим удалением первой залега-

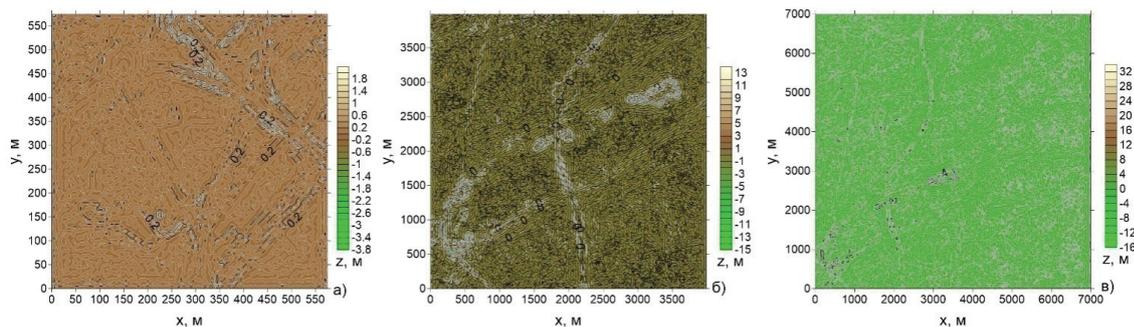


Рис. 8. Равнинная местность. Карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом: а) модель I; б) модель II; в) модель III.

ющей плоскости от минимальной высотной отметки ($2\Delta h \leq H_1 \leq 3\Delta h$). Глубину последней плоскости лучше выбирать в пределах $(h_{max} - h_{min})$, но если глубина первой плоскости уже превышает это значение, то оно может быть и больше, но желательно не более $4(h_{max} - h_{min})$, как было указано ранее – лишнее добавление в аппроксимирующую модель глубоко залегающих плоскостей не улучшит результаты. Погрешность восстановления высот при сгущении сетки увеличивается.

2.2. Модель II. Холмистая местность

Для апробации алгоритма на холмистой местности была выбрана территория из предоставленных заказчиком. Были выбраны области соответствующих размеров различного масштаба. Ниже приведем результаты, полученные на аппроксимируемом участке для каждой из областей.

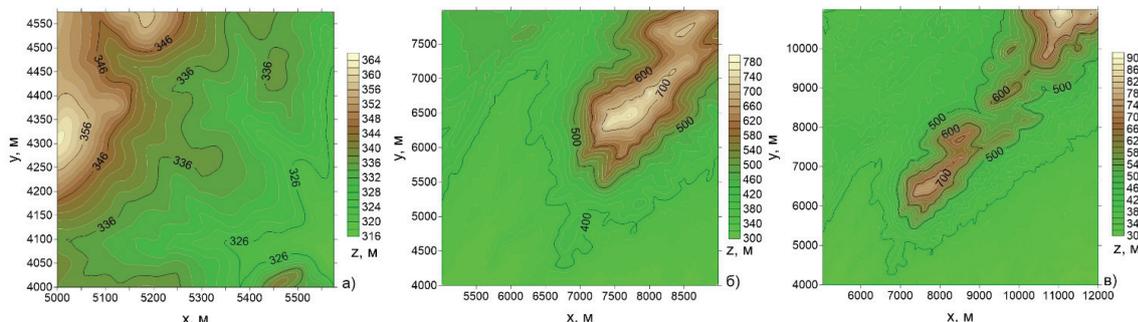


Рис. 9. Холмистая местность. Карта изолиний рельефа: а) модель I; б) модель II; в) модель III.

Таблица 6.

Холмистая местность. Результаты S-аппроксимации рельефа по точкам, использующимся для построения аппроксимации.

	N	σ_{min} , М	σ_{max} , М	$\frac{H_{min}, М}{H_{max}, М}$	Модель	n	σ_0 , М	ΔH , М	$\frac{\Delta}{t}$
I	13456	0,1219	0,2116	$\frac{316}{364}$	Mod_1	10	0,2087	3.14825	$\frac{6,2011 \cdot 10^{-4}}{0:21:15}$
II	13168	0,1232	0,2756	$\frac{300}{780}$	Mod_2	10	0,2719	3,0717	$\frac{5,9599 \cdot 10^{-4}}{4:01:17}$
III	13689	0,1209	0,3419	$\frac{300}{950}$	Mod_3	10	0,3385	3,0605	$\frac{7,3283 \cdot 10^{-4}}{6:31:24}$

Mod_1: $R=3$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 25$ м, $H_3 = 40$ м;

Mod_2: $R=6$, $H_1 = 80$ м, $H_2 = 120$ м, $H_3 = 180$ м, $H_4 = 260$ м, $H_5 = 360$ м, $H_6 = 480$ м;

Mod_3: $R=4$, $H_1 = 140$ м, $H_2 = 240$ м, $H_3 = 380$ м, $H_4 = 550$ м.

Результаты почти аналогичные результатам и для равнин – время счета увеличивается при увеличении шага сетки, и увеличивается (но не так сильно) СКО.

Таблица 7.

Холмистая местность. Результаты S-аппроксимации рельефа по всем точкам.

	M	Модель	σ_0^* , м	ΔH^* , м
II	641601	Mod_2	0,4866	9,8256
III	1962801	Mod_3	1,0503	28,2105

Результаты же восстановления высот по всем точкам показали результаты для модели **II** даже лучше, чем для равнины. Это обусловлено более гладким рельефом по сравнению с предыдущим примером – не смотря на более крутой рельеф, при этом локальных поднятий почти не присутствует, и, поэтому, СКО и максимальное отклонение не так сильно увеличились для модели **II**. Для модели **III** уже результаты ухудшаются, СКО на уровне 1 м.

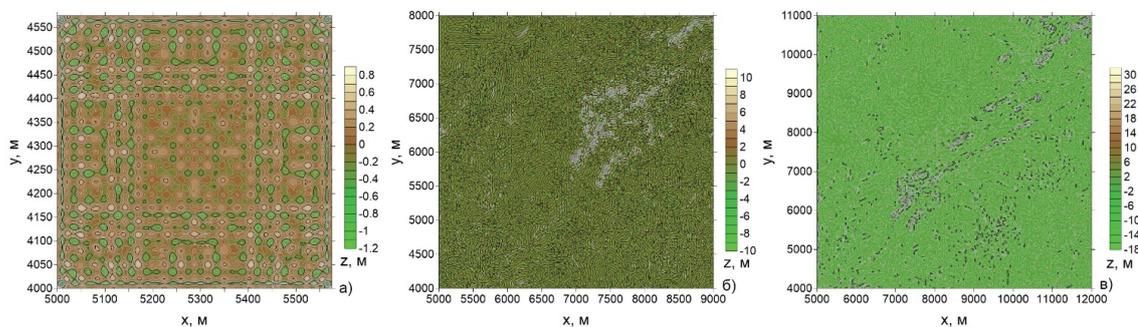


Рис. 10. Холмистая местность.

Карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом:

а) модель I; б) модель II; в) модель III.

Вывод: для холмистых областей, где шаг сетки достаточно высокий ($\Delta h > 15$ м) аппроксимацию необходимо производить с меньшим удалением первой залегающей плоскости от минимальной высотной отметки ($2\Delta h \leq H_1 \leq 3\Delta h$). Глубину последней плоскости лучше выбирать в пределах $(h_{\max} - h_{\min})$, но если глубина первой плоскости уже превышает это значение, то оно может быть и больше, но желательно не более $4(h_{\max} - h_{\min})$. Погрешность восстановления высот при сгущении сетки увеличивается.

2.3. Модель III. Горная местность

Для апробации алгоритма на горной местности были выбраны области соответствующих размеров различного масштаба. Ниже приведем результаты, полученные на аппроксимируемом участке для каждой из областей.

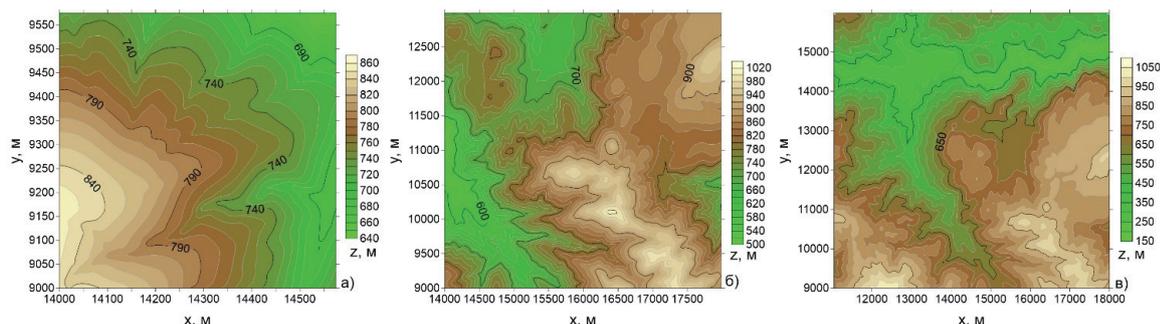


Рис. 11. Горная местность. Карта изолиний рельефа:
а) модель I; б) модель II; в) модель III.

Таблица 8.

Горы. Результаты S-аппроксимации рельефа по точкам, используемым для построения аппроксимации.

	<i>N</i>	σ_{\min} , М	σ_{\max} , М	$\frac{H_{\min}-M}{H_{\max}}$	Модель	<i>n</i>	σ_0 , М	ΔH , м	$\frac{\Delta}{t}$
I	13456	0,1	0,2112	$\frac{640}{860}$	Mod_1	10	0,195	3,6131	$\frac{2,5826 \cdot 10^{-4}}{0:47:04}$
II	13168	0,1509	0,3897	$\frac{500}{1020}$	Mod_2	3	0,3888	3,2668	$\frac{4,8651 \cdot 10^{-4}}{4:22:59}$
III	13689	0,2417	0,4681	$\frac{150}{1050}$	Mod_3	10	0,452	2,9365	$\frac{6,7802 \cdot 10^{-4}}{7:17:50}$

Mod_1: $R=7$, $H_1 = 15$ м, $H_2 = 25$ м, $H_3 = 40$ м, $H_4 = 60$ м, $H_5 = 90$ м, $H_6 = 140$ м, $H_7 = 200$ м;

Mod_2: $R=7$, $H_1 = 80$ м, $H_2 = 120$ м, $H_3 = 160$ м, $H_4 = 210$ м, $H_5 = 270$ м, $H_6 = 350$ м, $H_7 = 450$ м;

Mod_3: $R=6$, $H_1 = 125$ м, $H_2 = 200$ м, $H_3 = 280$ м, $H_4 = 360$ м, $H_5 = 480$ м, $H_6 = 700$ м;

Среднеквадратическое отклонение σ_0 значительно увеличивается при увеличении шага сетки. Если же уменьшать нижнюю границу до уровня 20 см, сходимость будет слишком медленной. Как видно, даже для достижения точности в 39 и 45 см для моделей II, III понадобилось гораздо больше вычислительного времени. Теперь оценим результаты по восстановлению высот на всей сети точек.

Таблица 9.

Горы. Результаты S-аппроксимации рельефа по всем точкам.

	<i>M</i>	Модель	σ_0^* , М	ΔH^* , М
II	641601	Mod_2	0,9365	15,821
III	1962801	Mod_3	2,8758	55,7186

Из результатов следует, что при аппроксимации горного рельефа качество восстановления высот значительно падает при сгущении сетки.

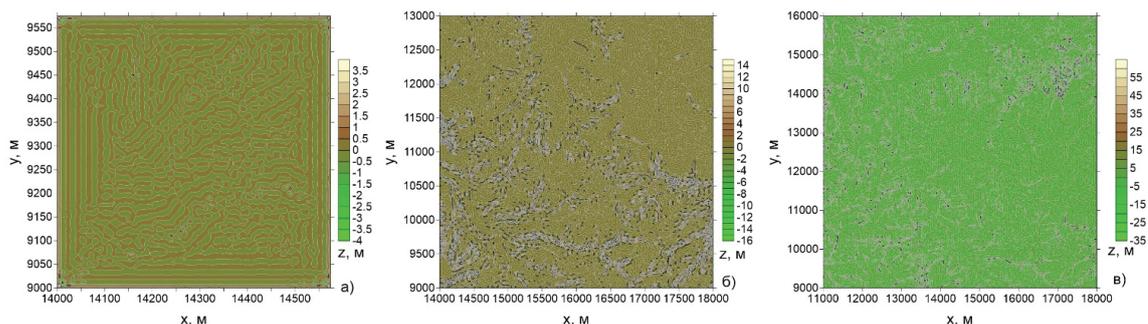


Рис. 12. Горная местность.

Карта разности между аппроксимацией и реальным рельефом:

а) модель I; б) модель II; в) модель III.

Вывод: для горной местности, где шаг сетки достаточно высокий ($\Delta h > 15$ м) аппроксимацию необходимо производить с меньшим удалением первой залегающей плоскости от минимальной высотной отметки ($2\Delta h \leq H_1 \leq 3\Delta h$). Глубину последней плоскости лучше выбирать в пределах $(h_{\max} - h_{\min})$. Погрешность восстановления высот при сгущении сетки заметно увеличивается.

Общие выводы

Получены результаты построения аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности для трех типов рельефа: равнинная, холмистая и горная местности. Детально проанализированы результаты работы алгоритма метода S-аппроксимаций. В качестве метода решения СЛАУ рассматривался регуляризованный трехслойный итерационный метод Чебышева.

Для всех типов рельефа аппроксимация возможна с высокой степенью точности, если площадь территории и шаг сетки относительно невысоки. С увеличением масштаба качество аппроксимации снижается. Для каждого из трех типов рельефа рассмотрено несколько вариантов моделей с различным количеством аппроксимирующих плоскостей и различными глубинами их залегания. Во всех трех случаях отмечено небольшое преимущество использования модели с несколькими плоскостями по сравнению с использованием всего 1-2 плоскостей. Для каждого из типов рельефа даны соответствующие рекомендации по выбору параметров модели для дальнейшего использования метода.

Проведено исследование по оценке качества решения в зависимости от исходного масштаба модели и по восстановлению высот в более густой сети точек. Результаты показали, что для каждого из трех типов областей точность аппроксимации ухудшается при увеличении масштаба. При этом восстановление высот в более густой сети точек увеличивается по мере увеличения шага сетки. Однако СКО на всей области остается в разумных пределах (менее 80 см для равнин, 110 см для холмов и 290 см для гор в рассматриваемых примерах) даже для территорий площадью 7000x7000 метров.

Разработаны рекомендации для выбора параметров аппроксимационной модели для каждого типа рельефа местности. Стоит обратить внимание, что с увеличением шага сетки необходимо уменьшать глубину залегания первой плоскости.

Литература

1. Керимов И. А. F-аппроксимации рельефа земной поверхности // Физика Земли. – 2009. – №8. – С. 101-112.
2. Керимов И. А. Метод F-аппроксимации при решении задач гравиметрии и магнитометрии. – М.: Физматлит, 2011. – 264 с.
3. Раевский Д. Н. Параллельные алгоритмы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений больших размерностей // Суперкомпьютерные дни в России: труды международной конференции. – М.: МГУ, 2016. – С. 912-925.
4. Раевский Д. Н., Степанова И. Э. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. – 2015а. – №2. – С. 44-54.
5. Раевский Д. Н., Степанова И. Э. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. – 2015б. – №2. – С. 55-66.
6. Степанова И. Э., Раевский Д. Н., Щепетиллов А. В. О повышении эффективности модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. – 2016. – №1. – С. 149-160.
7. Страхов В. Н. Геофизика и математика // Физика Земли. – 1995. – №12. – С. 4-23.
8. Страхов В. Н., Керимов И. А. Аппроксимационные конструкции спектрального анализа (F-аппроксимация) гравиметрических данных // Физика Земли. – 2001. – №12. – С. 3-20.
9. Страхов В. Н., Степанова И. Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. – 2002. – №2. – С. 3-19.
10. Страхов В. Н., Керимов И. А., Степанова И. Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. – М.: ИФЗ РАН, 2009. – 254 с.
11. Страхов В. Н., Степанова И. Э., Керимов И. А. К вопросу о вычислении поправок за рельеф // Физика Земли. – 2002. – №4. – С. 55-66.

STUDY OF THE S-APPROXIMATION METHOD FOR DIFFERENT TYPES OF LANDFORMS

© 2018 I. A. Kerimov¹, Sc. Doctor (Phys.-Math.), Prof., I. E. Stepanova¹, Sc. Doctor (Phys.-Math.), D. N. Raevskiy¹, Sc. Candidate (Phys.-Math.), A. V. Shchepetilov², Sc. Doctor (Phys.-Math.)

¹The Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Russia, 123995 Moscow, B. Gruzinskaya Str., 10-1, e-mail: kerimov@ifz.ru;

²Educational Institution of Higher Education M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie Gory, 1

The article deals with the results of studies of the possibilities of the S-approximation method in the construction of analytical approximations of the earth's surface relief. Analytical approximations for different types of terrain (plains, hills and mountains) and topographic data of different scales are obtained. For each type of relief the accuracy of the approximation is estimated and appropriate recommendations for the choice of model parameters are developed.

Keywords: integral representations, S-approximations, relief, SLAE, error.

References

1. Kerimov I.A. F-approximacii rel'efa zemnoj poverhnosti [F-approximations of the terrestrial surface]. *Fizika Zemli*. 2009. No. 8. Pp. 101-112. (in Russian)
2. Kerimov I.A. Metod F-approximacii pri reshenii zadach gravimetrii i magnitometrii [F-approximation method for solving problems of gravimetry and magnetometry]. M. Fizmatlit, 2011. 264 p. (in Russian)
3. Raevskij D.N. Parallel'nye algoritmy resheniya ploho obuslovlennyh sistem linejnyh algebraicheskikh uravnenij bol'shij razmernostej [Parallel algorithms for solving ill-conditioned systems of linear algebraic equations of large dimensions]. *Superkomp'yuternye dni v Rossii: trudy mezhdunarodnoj konferencii*. M. MGU, 2016. Pp. 912-925. (in Russian)
4. Raevskij D.N., Stepanova I.E. O reshenii obratnyh zadach gravimetrii s pomoshch'yu modifirovannogo metoda S-approximacij [The solution of the inverse problems gravimetry using a modified method of S-approximations]. *Fizika Zemli*. 2015a. No. 2. Pp. 44-54. (in Russian)
5. Raevskij D.N., Stepanova I.E. Modifirovannyj metod S-approximacij. Regional'nyj variant [Modified S-Approximation Method. Regional version]. *Fizika Zemli*. 2015b. No. 2. Pp. 55-66. (in Russian)
6. Stepanova I.E., Raevskij D.N., Shchepetilov A.V. O povyshenii effektivnosti modifirovannogo metoda S-approximacij [On improving the efficiency of the modified method of S-approximations]. *Fizika Zemli*. 2016. No. 1. Pp. 149-160. (in Russian)
7. Strahov V.N. Geofizika i matematika [Geophysics and Mathematics]. *Fizika Zemli*. 1995. No. 12. Pp. 4-23. (in Russian)
8. Strahov V.N., Kerimov I.A. Approksimacionnye konstrukcii spektral'nogo analiza (F-approximaciya) gravimetricheskikh dannyh [Approximating structure of spectral analysis (F-approximation) of gravimetric data]. *Fizika Zemli*. 2001. No. 12. Pp. 3-20. (in Russian)

9. Strahov V.N., Stepanova I.E. Metod S- approksimacij i ego ispol'zovanie pri reshenii zadach gravimetrii (lokal'nyj variant) [S- approximation method and its use in solving the problems of gravimetry (a local version)]. Fizika Zemli. 2002. No. 2. Pp. 3-19. (in Russian)

10. Strahov V.N., Kerimov I.A., Stepanova I.E. Razrabotka teorii i komp'yuternoj tehnologii postroeniya linejnyh analiticheskikh approksimacij gravitacionnyh i magnitnyh polej [Development of the theory and computer technology for constructing linear analytical approximations of gravitational and magnetic fields]. M. IFZ RAN, 2009. 254 p. (in Russian)

11. Strahov V.N., Stepanova I.E., Kerimov I.A. K voprosu o vychislenii popravok za rel'ef [On calculation of corrections for relief]. Fizika Zemli. 2002. No. 4. Pp. 55-66. (in Russian)