

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.1

DOI: [10.46698/VNC.2023.63.12.005](https://doi.org/10.46698/VNC.2023.63.12.005)

Оригинальная статья

Один эффективный метод решения начально-краевых задач поперечных колебаний балки с учетом ее внутреннего сопротивления

В.Б. Заалишвили¹, И.Д. Музаев^{1, 2}

¹Геофизический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Россия, 362002, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркова, д. 93а, e-mail: vzaal@mail.ru;

²Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия, 362002, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Молодежная, д. 7, e-mail: illarion.muzaev@yandex.ru

Статья поступила: 25.04.2021, доработана: 29.05.2021, принята к публикации: 08.06.2021

Резюме: Актуальность работы. В статье приведен вновь разработанный эффективный метод постановки и решения краевых задач поперечных колебаний балки с учетом внутреннего сопротивления материала балки по гипотезе Е.С. Сорокина. Рассматриваемые колебания, обусловленные приложением к балке сосредоточенных сил в случае, когда концы балки закреплены шарнирно, моделируются краевыми задачами для дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом. Комплексный коэффициент создает некоторые математические сложности в процессе решения начально-краевой задачи. **Методы исследования.** Разработанный в статье метод постановки и решения подобных начально-краевых задач основан на последовательном выполнении ряда математических операций. Достоверность и приемлемость разработанного метода доказаны концептуальным анализом и путем сопоставления полученных в статье результатов с ранее известными решениями таких же задач, но без учета внутреннего сопротивления балки. Результаты расчетов, являясь частными случаями при равенстве нулю коэффициента потерь, через который учтено внутреннее сопротивление балки, точно совпадают с результатами, полученными в данной статье. **Результаты работы.** На основе полученных расчетных формул в статье доказано утверждение о том, что учет внутреннего сопротивления балки существенно уточняет закономерности вынужденных колебаний, когда частота колебаний вынуждающей силы близка к значению собственной частоты колебаний балки. Это показывает высокую эффективность разработанного подхода. На основе проведенного сопоставительного анализа в статье доказано следующее важное утверждение: решения краевых задач, моделирующих вынужденные поперечные колебания балки, поставленные на основе гипотез Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта, могут резко отличаться одно от другого, однако их амплитудные значения будут точно совпадать. Вследствие того, что вынужденные колебания балки с учетом внутреннего сопротивления моделируются линейными краевыми, либо линейными начально-краевыми задачами математической физики, к ним и к разработанному в статье методу применим принцип суперпозиции решений. Согласно этому принципу, если на балку приложено несколько гармонических сил, то результирующие колебания можно получить наложением колебаний, вызванных каждой отдельной силой. Точно таким же образом можно решить по разработанному методу задачу о колебании балки, когда на нее приложена непрерывно распределенная гармоническая нагрузка, но дискретное суммирование необходимо заменить интегрированием вдоль длины балки.

Ключевые слова: начально-краевая задача, гипотеза Е.С. Сорокина, сосредоточенная сила, окорезонансная частота колебаний, характеристическое уравнение.

Для цитирования: Заалишвили В.Б., Музаев И.Д. Один эффективный метод решения начально-краевых задач поперечных колебаний балки с учетом ее внутреннего сопротивления. *Геология и геофизика Юга России*. 2023. 13(2): 55-66. DOI: [10.46698/VNC.2023.63.12.005](https://doi.org/10.46698/VNC.2023.63.12.005).

GEOPHYSICS

DOI: [10.46698/VNC.2023.63.12.005](https://doi.org/10.46698/VNC.2023.63.12.005)

Original paper

One effective method for solving initial-boundary problems of transverse vibrations of a beam, taking into account its internal resistance

V.B. Zaalishvili¹, I.D. Muzaev^{1, 2}

¹Geophysical Institute, Vladikavkaz Scientific Centre, Russian Academy of Sciences,
93a Markova Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation,
e-mail: vzaal@mail.ru;

²Vladikavkaz branch Financial University under the Government of the Russian Federation,
7 Molodyozhnaya Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation,
e-mail: illarion.muzaev@yandex.ru

Received: 25.04.2021, revised: 29.05.2021, accepted: 08.06.2021

Abstract: Relevance. The article presents a newly developed effective method for setting and solving boundary value problems of transverse vibrations of a beam, taking into account the internal resistance of the beam material according to the hypothesis of E.S. Sorokin. The considered vibrations caused by the application of concentrated forces to the beam in the case when the ends of the beam are hinged, are modeled by boundary value problems for a differential equation with a complex coefficient. The complex coefficient creates some mathematical difficulties in the process of solving the initial boundary value problem. **Methods.** The method of setting and solving similar initial-boundary value problems developed in the article is based on the sequential execution of a number of mathematical operations. The reliability and acceptability of the developed method are proved by conceptual analysis and by comparing the results obtained in the article with previously known solutions to the same problems, but without taking into account the internal resistance of the beam. The calculation results, being special cases when the loss factor is equal to zero, through which the internal resistance of the beam is taken into account, exactly coincide with the results obtained in this article. **Results.** On the basis of the obtained calculation formulas, the paper proves the assertion that taking into account the internal resistance of the beam significantly refines the patterns of forced vibrations when the frequency of the driving force is close to the value of the natural frequency of the beam. This shows the high efficiency of the developed approach. On the basis of the comparative analysis carried out in the article, the following important statement is proved: the solution of boundary value problems simulating the forced transverse vibrations of the beam, set on the basis of the hypotheses of E.S. Sorokin and Kelvin-Voigt may differ sharply from one another, but their amplitude values will exactly match. Due to the fact that the forced vibrations of the beam, taking into account internal resistance, are modeled by linear boundary or linear initial-boundary problems of mathematical physics, the principle of superposition of solutions is applicable to them and to the method developed in the article. According to this principle, if several harmonic forces are applied to the beam, then the resulting vibrations can be obtained by superimposing the vibrations caused by each individual force. In exactly the same way, it is possible to solve the problem of beam vibrations using the developed method when a continuously distributed harmonic load is applied to it, but the discrete summation must be replaced by integration along the length of the beam.

Keywords: initial-boundary problem, hypothesis of E.S. Sorokin, concentrated force, near-resonant vibration frequency, characteristic equation.

For citation: Zaalishvili V.B., Muzaev I.D. One effective method for solving initial-boundary problems of transverse vibrations of a beam, taking into account its internal resistance. *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Russian South*. (in Russ.). 2023. 13(2): 55-66. DOI: 10.46698/VNC.2023.63.12.005.

Введение

В различных научных разработках по теории колебаний и волн [Клаф, Пензиен, 1979; Корн Г., Корн Т., 1971; Кошляков и др., 1962; Лурье, 1970; Музаев и др., 2014, 2016; Рэлей, 1965; Скучик, 1971; Слепян, 1972; Сорокин, 1956; Тимошенко, 1959; Уфлянд, 1948; Ansari et al., 2014; Das et al., 2011; Khiemm, Tean, 2003; Lepid et al., 2009; Li et al., 2013; Mazza F., Mazza M., 2010; Mindlin, 1951; Prasad, 2008; Wang, Chang, 2010] поставлены и решены различные краевые задачи поперечных колебаний балочных и пластинчатых упругих тел, когда колебания вызваны приложением к ним сосредоточенных сил. При этом внутреннее сопротивление материала тела ни в одной работе не учтено. Между тем учет внутреннего сопротивления существенно уточняет закономерности вынужденных колебаний, когда частота колебаний вынуждающей силы близка к значению собственной частоты колебаний. Что касается свободных колебаний, то они быстро затухают под действием внутреннего сопротивления материала балки.

В книге С.П. Тимошенко [1959] поставлена и решена начально-краевая задача колебаний балки, когда колебание обусловлено воздействием на балку сосредоточенной синусоидальной силы $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$.

На рисунке 1 представлена расчетная схема этой задачи.

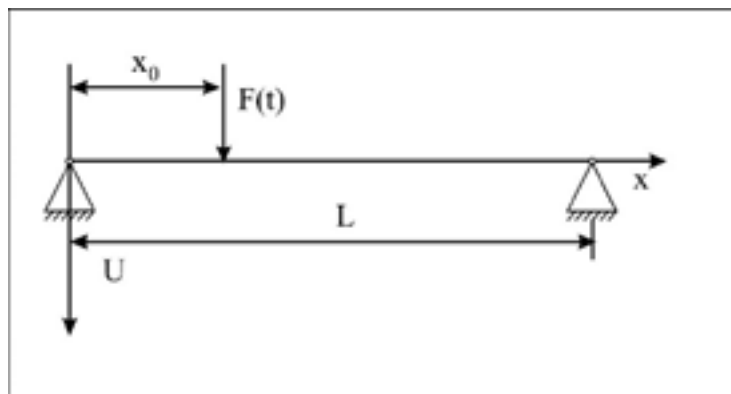


Рис. 1. Расчётная схема начально-краевой задачи С.П. Тимошенко /

Fig. 1. Calculation scheme of the initial-boundary value problem of S.P. Timoshenko

Полагается, что концы балки $x=0$ и $x=L$ шарнирно закреплены. Поставленная задача решена методами математической физики с привлечением методов виртуальных перемещений.

Для функции $U(x, t)$ получена следующая расчетная формула:

$$U(x, t) = \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n x_0 \cdot \sin a_n x}{z_n^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega}{z_n} \frac{\omega \sin a_n x_0 \cdot \sin a_n x}{(z_n^2 - \omega^2)} \sin z_n t \quad (1)$$

$$z_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} a_n^2; \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения: ρ и E – плотность и модуль упругости материала балки, S и I – площадь и момент инерции поперечного сечения балки, L – длина балки, x_0 – точка приложения сосредоточенной силы $F(t)$, ω – частота синусоидальной силы.

Первая сумма в формуле (1) выражает вынужденные колебания балки под действием приложенной силы $F(t)$. Вторая сумма выражает свободные колебания балки. Если бы в постановке этой задачи было учтено внутреннее сопротивление материала балки, то вторая сумма затухала бы в течение времени, а первая сумма получилась бы с существенными поправками. Следовательно, для вынужденных колебаний балки без учета внутреннего сопротивления материала получается следующая расчетная формула:

$$U(x, t) = \frac{2}{L} \frac{F_0}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n x_0 \cdot \sin a_n x}{z_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (3)$$

С учетом диссипации энергии колебания балки моделируются двумя разными дифференциальными уравнениями в зависимости от принимаемой гипотезы Е.С. Сорокина либо Кельвина-Фойгта.

Согласно гипотезе Е.С. Сорокина, поперечное колебание балки с учетом диссипации энергии моделируются следующим дифференциальным уравнением в частных производных [Скучик, 1971; Сорокин, 1956; Музаев и др., 2014]:

$$EI(1 + i\eta) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (4)$$

Согласно гипотезе Кельвина-Фойгта, поперечные упругие колебания балки с учетом диссипации энергии моделируются следующим дифференциальным уравнением:

$$EI \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \delta \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (5)$$

где i – мнимая единица, x – координата, отсчитываемая вдоль продольной си балки, t – время, $q(x, t)$ – внешняя поперечно распределенная либо сосредоточенная сила. Оба коэффициента η и δ характеризуют интенсивность диссипации энергии колебаний из-за внутреннего трения в материале балки.

При гармонических колебаниях эти коэффициенты взаимосвязаны следующей зависимостью:

$$\eta = \omega \delta. \quad (6)$$

С целью сопоставления решений краевых задач, получаемых из рассматриваемых двух математических моделей при одинаковых внешних силах, рассмотрим тестовую задачу, когда правые части дифференциальных уравнений (4) и (5) заданы в виде общей гармонической функции от времени:

$$q(x, t) = q_0(x) e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Для определения вынужденных колебаний балки искомые функции $U(x, t)$ надо представить в следующем виде:

$$U(x, t) = V(x) e^{i\omega t}. \quad (8)$$

В результате подстановки выражения (8) в (4) и (5) для неизвестной функции $V(x)$ получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} EI(1 + i\eta) \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho S \omega^2 V &= q_0(x), \\ EI(1 + i\delta\omega) \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho S \omega^2 V &= q_0(x), \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом зависимости (6) эти два дифференциальных уравнения имеют одинаковые виды, и при одинаковых граничных условиях они будут иметь одинаковые решения.

В другой тестовой задаче полагается, что внешняя сила $q(x, t)$ задана в виде синусоидальной гармонической функции по времени t , а также синусоидальной функцией по продольной координате x .

$$q(x, t) = q_0 \sin \omega t \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x, n=1, 2, \dots \quad (10)$$

Кроме этого полагается, что концы балки закреплены шарнирно. С учетом этих предположений, решения краевой задачи, поставленной на основе гипотезы Е.С. Сорокина, получается в виде следующей комплексной функции:

$$U(x, t) = \frac{q_0}{\rho S} \frac{z_n^2 - \omega^2 - iz_n^2 \eta}{(z_n^2 - \omega^2)^2 + (z_n^2 \eta)^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \omega t. \quad (11)$$

Решение той же краевой задачи, поставленной на основе Кельвина-Фойгта, получается в виде следующей действительной функции:

$$U(x, t) = \frac{q_0}{\rho S} \frac{(z_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - z_n^2 \delta \omega \cos \omega t}{(z_n^2 - \omega^2)^2 + (z_n^2 \delta \omega)^2} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (12)$$

Эти два решения резко отличаются друг от друга. Однако их амплитуды колебания точно совпадают. Для комплексной функции ее амплитудой колебания считается ее модуль:

$$|U(x, t)| = \frac{q_0}{\rho S} \frac{\sin \frac{n\pi}{L} x}{\sqrt{(z_n^2 - \omega^2)^2 + (z_n^2 \delta \omega)^2}} \quad (13)$$

Амплитуда действительной функции (12) также получается в виде:

$$\text{Amp} U(x, t) = \frac{q_0}{\rho S} \frac{\sin \frac{n\pi}{L} x}{\sqrt{(z_n^2 - \omega^2)^2 + (z_n^2 \delta \omega)^2}} \quad (14)$$

Учитывая формулу (6) становится очевидным, что формулы (13) и (14) точно совпадают.

На основе проведенного сопоставительного анализа можно сделать следующее важное заключение: Решения краевых задач, моделирующих вынужденные поперечные колебания балки, поставленные на основе гипотез Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта, могут значительно отличаться одно от другого, однако их амплитудные значения будут точно совпадать.

Методы работы

Методы разрешения рассматриваемой проблемы основаны на постановке и решении краевой задачи вынужденных поперечных колебаний балки с учетом его внутреннего сопротивления.

Постановка и решение краевой задачи вынужденных поперечных колебания балки с учетом внутреннего сопротивления. Согласно гипотезе Е.С. Сорокина, поперечные вынужденные колебания балки с учетом вышеперечисленных особенностей моделируется следующей краевой задачей математической физики:

$$EI(1 + i\eta) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(t) \frac{f(x)}{2\varepsilon} \quad (15)$$

$$f(t) = F_0 \sin \omega t; F(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \\ 0, & \text{при } x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \end{cases} \quad (16)$$

$$U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \text{ при } x = 0, x = L \quad (17)$$

где $f(x)$ – вспомогательная функция имеющая вид (16), i – мнимая единица.

Легко можно заметить, что сосредоточенная в точке x_0 сила $F(t)$ рассредоточена в малой ε -окрестности точки x_0 . Выражение (15) есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки, в котором через коэффициент η учтено внутреннее сопротивление в процессе колебаний балки.

Метод постановки и решения начально-краевой задачи, который ранее был применен С.П. Тимошенко, пригоден только для случая, когда не учитывается внутреннее сопротивление балки, то есть когда $\eta=0$. При $\eta \neq 0$ коэффициент в дифференциальном уравнении является комплексной величиной. Этот фактор создает некоторые математические трудности в процессе решения дифференциального уравнения (15) с граничными условиями (17). Данная статья посвящена разработке метода решения таких краевых задач.

На первом шаге разрабатываемого метода сила $F(t)$ рассредоточивается на малой ε -окрестности точки приложения силы, как показано в формулах (15)–(16) и на рисунке 2.

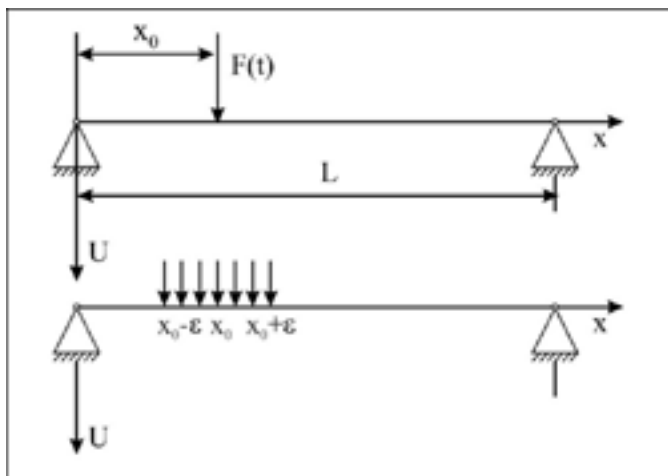


Рис. 2. Расчётная схема начально-краевой задачи /

Fig. 2. Calculation scheme of the initial-boundary value problem

На втором шаге искомая комплексная функция $U(x, t)$ ищется в виде следующего тригонометрического ряда по собственным функциям, удовлетворяющим граничным условиям (2.3) [Корн Г., Корн Т., 1971; Кошляков и др., 1962; Музаев и др., 2014, 2016; Тимошенко, 1959; Ansari et al., 2014; Das et al., 2011; Khiemm, Tean, 2003; Lepid et al., 2009; Li et al., 2013; Mazza F., Mazza M., 2010; Prasad, 2008; Wang, Chang, 2010]:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (18)$$

На этом же шаге вспомогательная функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{ \sin \frac{n\pi}{L} x \right\}$ начально-краевой задачи:

$$\frac{1}{2\varepsilon} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \alpha_n = \frac{2}{La_n} \frac{\sin a_n x_0 \cdot \sin a_n \varepsilon}{\varepsilon} \quad (19)$$

Выражение (18) автоматически удовлетворяет граничным условиям (17). В результате подстановки выражений (18) и (19) в дифференциальное уравнение (15) для искомых функций $U_n(t)$ получится следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} + Z_n^2 (1 + i\eta) U_n = \frac{F_0}{\rho S} \alpha_n \sin \omega t Z_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (20)$$

Теория дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами не разработана, соответствующие справочные пособия отсутствуют. В связи с этим дифференциальное уравнение (20) с комплексным коэффициентом целесообразно привести к системе, состоящей из двух дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами, где искомыми функциями являются действительная часть и коэффициент мнимой части искомой комплексной функции $U_n(t)$ [Кошляков и др., 1962; Корн Г., Корн Т., 1971]:

$$U_n(t) = Y_{1,n}(t) + iY_{2,n}(t) \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y_{1,n}}{dt^2} + Z_n^2 Y_{1,n} - Z_n^2 \eta Y_{2,n} = \frac{F_0}{\rho S} \alpha_n \sin \omega t, \\ \frac{d^2 Y_{2,n}}{dt^2} + Z_n^2 Y_{2,n} + Z_n^2 \eta Y_{1,n} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

В результате исключения функции $Y_{2,n}$ из системы (22) для функции $Y_{1,n}$ получится следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка с действительными коэффициентами:

$$\frac{d^4 Y_{1,n}}{dt^4} + 2Z_n^2 \frac{d^2 Y_{1,n}}{dt^2} + Z_n^4 (1 + \eta^2) Y_{1,n} = \frac{F_0}{\rho S} \alpha_n (Z_n^2 - \omega^2) \sin \omega t \quad (23)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (23) имеет следующий вид [Клаф, Пензиен, 1979; Корн Г., Корн Т., 1971; Кошляков и др., 1962; Лурье, 1970; Музаев и др., 2014, 2016; Рэлей, 1965; Скучик, 1971; Слепьян, 1972; Сорокин, 1956; Уфлянд, 1948; Mindlin, 1951]:

$$(\lambda^2 + Z_n^2)^2 + Z_n^4 \eta^2 = 0, \quad (24)$$

Корни этого уравнения являются следующие комплексные числа:

$$\lambda = \pm(\alpha \pm i\beta)Z_n, \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}}, \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}} \quad (25)$$

Очевидно, что функции $Y_{1,n}(t)$ и $Y_{2,n}(t)$ должны быть ограничены при $t \rightarrow \infty$. В связи с этим решение дифференциального уравнения (23) получается в следующем виде [Корн Г., Корн Т., 1971; Кошляков и др., 1962; Музаев и др., 2014, 2016]:

$$Y_{1,n}(t) = \frac{F_0}{\rho S} \alpha_n \frac{(Z_n^2 - \omega^2) \sin \omega t}{(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2} \quad (26)$$

Для функции $Y_{2,n}(t)$ получается следующее выражение:

$$Y_{2,n}(t) = -\frac{F_0}{\rho S} \alpha_n \frac{Z_n^2 \eta \cos \beta Z_n t}{(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2} \quad (27)$$

Выражения (26) и (27) совместно представляют решение системы дифференциальных уравнений (22).

Для первоначальной искомой комплексной функции $U(x,t)$ получено следующее выражение:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [Y_{1,n}(t) + iY_{2,n}(t)] \sin a_n x, a_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (28)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ из выражения (19) получается:

$$\alpha_n \rightarrow \frac{2}{L} \sin a_n x_0. \quad (29)$$

Действительная часть полученного решения (28) краевой задачи (15)–(17) представляет закон колебания балки, на которую приложена гармоническая сила $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$:

$$ReU(x, t) = \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{(Z_n^2 - \omega^2) \sin \alpha_n x}{(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2} \sin \omega t, Z_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \alpha_n^2 \quad (30)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ рассредоточенная сила $F(t)$ сосредотачивается в точке x_0 .

Модуль комплексного перемещения $U(x, t)$ получается в следующем виде:

$$|U(x, t)| = \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\sin \alpha_n x_0}{(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2} \sin \alpha_n x \quad (31)$$

Математический анализ полученных расчетных формул и концептуальное доказательство приемлемости разработанного метода. При значении $\eta=0$, в разработанном методе внутреннее сопротивление балки не учитывается. Комплексное решение (28) поставленной краевой задачи (15)–(17) вырождается в действительную функцию и приводится к следующему виду:

$$U(x, t) = \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x}{Z_n^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (32)$$

Эта расчетная формула для вынужденных перемещений в балке точно совпадает с расчетной формулой (3), которая впервые была получена С.П. Тимошенко [1959] методом виртуальных перемещений.

Если сила $F(t)$ изменяется настолько медленно, что $F(t)$ сохраняет постоянное значение F при $\omega \rightarrow 0$, то в формуле (30) можно пренебречь величиной ω^2 и тогда она приводится к следующему виду:

$$ReU(x, t) = \frac{2 F_0}{L \rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x}{Z_n^2 (1 + \eta^2)} \quad (33)$$

Если постоянная сила F приложена в середине балки, то формула (3.2) сильно упрощается и из нее получается следующая формула для максимального прогиба серединной точки балки под действием постоянной силы приложенной к середине балки:

$$ReU\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2 F L^3}{\pi^4 E I (1 + \eta^2)} \quad (34)$$

При $\eta=0$ формулы (33) и (34) точно совпадают с формулой С.П. Тимошенко [1959] для той же задачи но без учета внутреннего сопротивления.

Из формулы (3) можно получить формулу для вычисления вынужденных колебаний балки, вызванных гармоническим моментом, приложенным к концу балки при $x=0$. К условиям таких колебаний мы приблизимся тем более точно, чем меньше координата x_0 точки приложения силы F . Взяв весьма малое значение x_0 и рассматривая только первые несколько членов ряда (33) можно принять приближение:

$$\sin \frac{n\pi}{L} x_0 \approx \frac{n\pi}{L} x_0.$$

Подставляя это приближенное значение в формулу (33) и обозначив $M=F \cdot x_0$, получим:

$$ReU(x, t) = \frac{2\pi M}{S \rho L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(Z_n^2 - \omega^2) \sin \alpha_n x}{(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2} \sin \omega t \quad (35)$$

При $\eta=0$ эта формула точно совпадает с формулой, полученной С.П. Тимошенко [1959] для той же задачи, но без учета внутреннего сопротивления балки. В связи с тем, что колебание балки моделируется линейным дифференциальным уравнением, к поставленной приложим закон (принцип) суперпозиции согласно которому, если на балку действует несколько сил, то итоговое колебание определяется

наложением колебаний, обусловленных каждой отдельной силой. Если на балку действует равномерно распределенная по всей длине балки гармоническая нагрузка интенсивностью $q_0 \sin \omega t$ (Н/м), то соответствующее решение можно получить из выражения (28) следующими подстановками:

$$x_0 = \frac{L}{2}; \quad \varepsilon = \frac{L}{2}; \quad \frac{F}{L} = q_0;$$

и тогда:

$$\text{Re}U(x, t) = \frac{4q_0}{\rho S L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z_n^2 - \omega^2) \sin b_n x \sin \omega t}{[(Z_n^2 - \omega^2)^2 + (Z_n^2 \eta)^2]^{1/2} b_n}, \quad b_n = \frac{(2n-1)\pi}{L} \quad (36)$$

Если в выражении (36) предположить, что частота колебаний нагрузки весьма малая величина, но при этом интенсивность нагрузки сохраняет постоянное значение, то решение задачи, соответствующее этим предположениям, получается из выражения (36) в следующем виде:

$$\text{Re}U(x, t) = \frac{4q_0 L^4}{EI \pi^5 (1 + \eta^2)} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{1^5} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{L}}{3^5} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{L}}{5^5} + \dots \right) \quad (37)$$

Бесконечный ряд в скобках сходится очень быстро. Для вычисления прогиба серединной точки балки получается следующая приближенная формула:

$$\text{Re}U\left(\frac{L}{2}\right) \approx \frac{4q_0 L^4}{EI \pi^5 (1 + \eta^2)} \quad (38)$$

При $\eta=0$ эти формулы (35)–(38) точно совпадают с формулами полученными С.П. Тимошенко [1959]

В монографии Е. Скучика [1971] приведены графики зависимостей коэффициентов потерь η от частоты колебаний для следующих веществ: стекло, серебро, алюминий, сталь, латунь, резина и дерево с различной степенью сушки. Максимальное значение коэффициента потерь η имеет резина и составляет $\eta=0,5$, в то время как у всех остальных веществ η на два-три порядка меньше чем у резины. Для стали при высоких частотах колебаний $\eta=0,0005$.

Математический анализ полученных расчетных формул для вынужденных колебаний балки показывает, что учет сопротивления материала в колебательном процессе существенно уточняет закономерность колебания балки при около резонансных частотах колебаний. Если частота приложенной силы существенно отличается от всех значений спектра собственных (резонансных) частот колебаний балки, то учет внутреннего сопротивления материала балки на ее колебательный процесс практически не влияет из за малых значений величины η . В этом случае учет внутреннего сопротивления балки имеет лишь теоретический интерес.

Результаты работы и их обсуждение

В статье впервые получена совокупность расчетных формул для закона поперечного колебания балки с шарнирно заделанными концами, на которую приложены гармонические сосредоточенные силы. В полученных формулах уточнено внутреннее сопротивление материала балки.

Математическим анализом полученной совокупности расчетных формул доказано утверждение о том, что учет внутреннего сопротивления материала балки существенно уточняет закономерности колебания балки, когда частота колебания вынуждающей силы близка к частоте собственного колебания балки. Если частота приложенной силы существенно отличается от всех значений спектра собствен-

ных (резонансных) частот колебаний балки, то учет внутреннего сопротивления материала балки на ее колебательный процесс практически не влияет из-за малых значений коэффициента сопротивления. В этом случае учет внутреннего сопротивления балки имеет лишь теоретический интерес.

Выводы

Разработан эффективный метод постановки и решения краевых задач вынужденных поперечных колебаний балки с учетом внутреннего сопротивления материала балки, в соответствии с гипотезой Е.С. Сорокина. Колебание балки обусловлено приложением на нее сосредоточенной силы. Рассмотрен случай, когда концы балки заделаны шарнирно. При перечисленных условиях поперечные колебания балки моделируются краевой задачей математической физики, поставленной для дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом. В связи с этим учет внутреннего сопротивления, а также сосредоточенность приложенной силы создают определенные математические трудности как в постановке, так и в решении краевой задачи. Разработанный метод постановки и решения подобных краевых задач основан на последовательном выполнении следующих математических операций:

- сосредоточенные силы рассредоточиваются на малых ε -окрестностях точек их приложения;
- искомая комплексная функция ищется в виде тригонометрического ряда по собственным функциям, удовлетворяющим граничные условия задачи;
- для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с комплексным коэффициентом, которое затем приводится к системе, состоящей из двух дифференциальных уравнений второго порядка с действительными коэффициентами и этим приемом устраняется комплексный коэффициент в краевой задаче;
- далее ход решения поставленной краевой задачи идет в соответствии с теорией решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами;
- в конце решения краевой задачи ε -окрестности устремляются к нулю, раскрываются неопределенности типа $0/0$ и рассредоточенные силы вновь сосредотачиваются в точках их приложения.

Достоверность и приемлемость разработанного метода доказаны концептуальным анализом и путем сопоставления полученных в статье результатов с ранее известными решениями таких же задач, но без учета внутреннего сопротивления балки. Эти решения, как частный случай, точно совпадают с результатами, полученными в данной статье при равенстве нулю коэффициента потерь, через который учтено внутреннее сопротивление балки.

На основе полученных расчетных формул доказано утверждение о том, что учет внутреннего сопротивления материала балки существенно уточняет закономерности вынужденных колебаний, когда частота колебания вынуждающей силы близка к значению собственной частоты колебания балки.

Литература

1. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 830 с.

3. Кошляков А.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. – 940 с.
5. Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Постановка и решение многослойной краевой задачи сейсмических колебаний высотного сооружения. // Сейсмическое строительство, безопасность сооружений. – 2014. – №01. – С. 22–25.
6. Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Теоретические положения автоматизации проектирования селективных водозаборных устройств. // Вычислительные технологии. – 2016. – Т. 21. №4. – С. 99–110.
7. Рэлей. Теория звука. Т. II. – М.: Гостехиздат, 1965. – 475 с.
8. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. Перевод с англ. – М.: Мир, 1971. – 274 с.
9. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 371 с.
10. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Гостехиздат, 1956. – 336 с.
11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
12. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12. Вып. 2. – С. 289–300.
13. Хулелидзе К.К., Кондратьев Ю.И., Бетров З.С., Заалишвили В.Б. Оценка коренных и техногенных месторождений РСО-Алания как возможных объектов применения технологии подземного и кучного выщелачивания. // Устойчивое развитие горных территорий. – 2016. – Т. 8(1). – С. 46–51.
14. Ansari M.F.F.S., Mohammadi V., Rouhi, H. Nonlinear forced vibration analysis of postbuckled beams. // Archive of Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 84(3). – pp. 421–440.
15. Das D., Sahoo P., Saha, K. A numerical analysis of large amplitude beam vibration under different boundary conditions and excitation pattern. // Journal of Vibrations and Control. – 2011. – Vol. 18(12). – pp. 1900–1915.
16. Khiem N.T., Tean L.K. A novel method for crack detection beamlike structures by measurement of natural frequencies. // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 259(1). – pp. 145–160.
17. Lepidi M., Gautulle V., Verstroni F. Damage identification in classic suspended cables through frequency measurement. // Journal of Vibrations and Control. – 2009. – Vol. 15(6). – pp. 867–896.
18. Li S., Reinders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. // J. Sound Vibrat. – 2013. – Vol. 332. – pp. 795–802.
19. Mazza, F., Mazza, M. Nonlinear analysis of spatial framed structures by lumped plasticity model based on the Haar-Karman principle. // Computational Mechanics. – 2010. – Vol. 45(6). – pp. 647–664.
20. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear elastic plates. // Journ. Of Appl. Mech. 1951. – Vol. 18. No.1. – p.31.
21. Prasad R., Seshu D.R. A study on dynamic characteristic of structural materials using modal analysis. // Asian Journal of Civil Engineering. – 2008. – Vol. 9. No.2. – pp. 141–152.
22. Wang Y.-R., Chang H.-L. The effect of a vibration absorber on a nonlinear two-dimensional system in vibration reduction. // J. Emerging Trends And Appl. Sci. – 2010. – Vol. 1. No.1. – pp. 60–71.

References

1. Clough R., Penzien J. Structural dynamics. Moscow. Stroyizdat, 1979. 320 p. (In Russ.)
2. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics for researchers and engineers. Moscow. Nauka, 1977. 830 p. (In Russ.)

3. Koshlyakov A.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Differential Equations of Mathematical Physics. Moscow. Fizmatgis, 1962. 767 p. (In Russ.)
4. Lurie A.I. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1970. - 940 p. (In Russ.)
5. Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. The multilayer boundary-value problem of the high-rise building seismic vibrations setting and the solution. Earthquake engineering. Constructions safety. 2014 . No. 01 . pp. 22–25. (In Russ.)
6. Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Theoretical positions of automation of designing selective water intake devices. Computational technologies. 2016. Vol. 21. No. 4. pp. 99–110. (In Russ.)
7. Rayleigh. Theory of sound. T. II . Moscow. Gostekhizdat, 1965. 475 p. (In Russ.)
8. Skuchik E. Simple and complex oscillatory systems. Moscow. Mir. 1971. 274 p. (In Russ.)
9. Slepyan L.I. Non-stationary elastic waves. Leningrad. Shipbuilding. 1972. 371 p. (In Russ.)
10. Sorokin E.S. Dynamic calculation of load-bearing structures of buildings. Moscow. Gostekhizdat, 1956. 336 p. (In Russ.)
11. Timoshenko S.P. Vibrations in engineering. Moscow. Fizmatgiz, 1959. 439 p. (In Russ.)
12. Uflyand Ya.S. Propagation of waves during transverse vibrations of rods and plates. Applied mathematics and mechanics. 1948. Vol. 12. Issue 2. pp. 289–300. (In Russ.)
13. Hulelidze K.K., Kondratyev Yu.I., Betzov Z.S., Zaalishvili V.B. Evaluation of original and technogenic deposits of the republic of north Ossetia-Alania as possible objects of application of underground and heap leaching technology. Sustainable Development of Mountain Territories. 2016. Vol. 8(1). pp. 46–51.
14. Ansari MFFS, Mohammadi V., Rouhi, H. Nonlinear forced vibration analysis of postbuckled beams. Archive of Applied Mechanics. 2014. Vol. 84. No. 3. pp. 421–440.
15. Das D., Sahoo P., Saha, K. A numerical analysis of large amplitude beam vibration under different boundary conditions and excitation pattern. Journal of Vibrations and Control. 2011. Vol. 18. No. 12. pp. 1900–1915.
16. Khiem NT, Tean LK A novel method for crack detection beamlike structures by measurement of natural frequencies. Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259. No. 1. pp. 145–160.
17. Lepidi M., Gautulle V., Verstroni F. Damage identification in classic suspended cables through frequency measurement. Journal of Vibrations and Control. 2009. Vol. 15. No. 6. pp. 867–896.
18. Li S., Reinders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. pp. 795–802.
19. Mazza, F., Mazza, M. Nonlinear analysis of spatial framed structures by lumped plasticity model based on the haas-karman principle. Computational Mechanics. 2010. Vol. 45. No. 6. pp. 647–664.
20. Mindlin RD Influence of rotatory inertia and shear elastic plates. Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. No.1. p. 31.
21. Prasad R ., Seshu DR A study on dynamic characteristic of structural materials using modal analysis. Asian Journal of Civil Engineering. 2008. Vol. 9. No.2. pp. 141–152.
22. Wang Y.-R., Chang H.-L. The effect of a vibration absorber on a nonlinear two-dimensional system in vibration reduction. Journal of Emerging Trends And Applied Sciences. 2010. Vol. 1. No.1. pp. 60–71.