

ГЕОТЕКТНИКА И ГЕОДИНАМИКА

УДК 551.1

[DOI: 10.46698/VNC.2022.34.57.002](https://doi.org/10.46698/VNC.2022.34.57.002)

Оригинальная статья

Математическое моделирование сдвиговых сейсмических колебаний массива состоящего из рекультивированного материала отложения горнорудной промышленности (хвосты)

И.Д. Музаев^{id}, К.С. Харебов^{id}, Н.И. Музаев^{id}

Геофизический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук,
Россия, 362002, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркова, 93а,
e-mail: kosta7x7@yandex.ru

Статья поступила: 28.03.2022, доработана: 20.04.2022, принята к публикации: 28.05.2022

Резюме: Актуальность работы. В статье поставлены и решены две начально-краевые задачи математической физики, моделирующие сдвиговые сейсмические колебания массива, состоящего из отходного материала хвостохранилища, когда движение массива вызвано падением сейсмической волны на его подстилающую поверхность. **Цель работы.** Пристальный интерес к подобным прикладным задачам обусловлен тем, что нередко такой массив расположен в узкой пойме реки близко к речному потоку. При сейсмотектонических ситуациях может создаться потенциальная экологическая опасность для речной системы региона из-за возможного обрушения в речной поток токсического материала, слагающего массив. **Методы работы.** Одна задача решена в рамках гипотезы Е.С. Сорокина относительно диссипации энергии, обусловленной внутренним сопротивлением в среде. Другая задача поставлена и решена в рамках гипотезы Кельвина-Фойгта. Один коэффициент в дифференциальных уравнениях сдвиговых колебаний является комплексной величиной. Другой коэффициент представляет функцию, зависящую от пространственной координаты. Эти особенности в представленных краевых задачах создают математические трудности при попытке их решения аналитическими методами математической физики. В связи с указанными особенностями, при произвольной зависимости коэффициентов от пространственной координаты поставленные задачи во всем мире никем не решены. **Результаты работы.** В данной работе найден путь решения этих задач в частном случае при экспоненциальной зависимости ширины массива от координаты. В этом частном случае переменные коэффициенты вырождаются в постоянные величины и тем самым путь решения поставленных задач существенно облегчается. В результате решения поставленных двух задач, для каждой получена совокупность расчетных формул для вычисления сейсмонапряжений и сейсмоперемещений в теле массива. По полученным расчетным формулам выполнены вычислительные эксперименты с использованием компьютерных технологий по определению сейсмических напряжений и перемещений на подстилающей поверхности и на гребне массива в зависимости от частоты и амплитуды падающей сейсмической волны. Полученные результаты позволяют выполнить дальнейшие оценочные расчеты по нарушению целостности массива и его частичного либо полного обрушения в речной поток.

Ключевые слова: сдвиговые колебания массива, гипотеза Сорокина, гипотеза Кельвина-Фойгта, коэффициент сопротивления, угол откоса массива.

Для цитирования: Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование сдвиговых сейсмических колебаний массива состоящего из рекультивированного материала отложения горнорудной промышленности (хвосты). *Геология и геофизика Юга России*. 2022. 12(2): 19-33. DOI: 10.46698/VNC.2022.34.57.002.

DOI: [10.46698/VNC.2022.34.57.002](https://doi.org/10.46698/VNC.2022.34.57.002)

Original paper

Mathematical modeling of shear seismic vibrations of an array consisting of recultivated material deposits of the mining industry (tailings)

I.D. Muzaev^{ID}, K.S. Harebov^{ID}, N.I. Muzaev^{ID}

Geophysical Institute, Vladikavkaz Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, 93a Markova Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation, e-mail: kosta7x7@yandex.ru

Received: 28.03.2022, revised: 20.04.2022, accepted: 28.05.2022

Abstract: Relevance. When the tailings, where toxic waste from the processing of the mining and metallurgical industry was constantly dumped and accumulated, collapse, an environmental threat occurs. Sometime, the waste array is located in a narrow floodplain of the river close to the river stream. In seismotectonic situations, a potential environmental hazard may be created for the region river system due to the possible collapse of toxic material composing the massif into the river stream. **Aim.** Formulation and solution of two initial boundary value problems of mathematical physics modeling shear seismic vibrations of an array consisting of waste material of a tailings dump, when the movement of the array is caused by the fall of a seismic wave on its underlying surface. **Methods.** One problem is solved within the framework of the hypothesis of E.S. Sorokin regarding the dissipation of energy due to internal resistance in the medium. Another problem is posed and solved within the framework of the Kelvin-Voigt hypothesis. One coefficient in the differential equations of shear oscillations is a complex quantity. The other coefficient represents a function depending on the spatial coordinate. These features in the presented boundary value problems create mathematical difficulties when trying to solve them by analytical methods of mathematical physics. Due to these features, with an arbitrary dependence of the coefficients on the spatial coordinate, the tasks set have not been solved by anyone all over the world. In this paper, we have found a way to solve these problems in the special case with an exponential dependence of the array width on the coordinate. In this particular case, the variable coefficients degenerate into constant values and thus the way to solve the tasks is significantly facilitated. **Results.** When solving the two tasks, a set of calculation formulas for calculating seismic stresses and seismic displacements in the body of the array was obtained for each. According to the obtained calculation formulas, computational experiments were performed, using computer technologies to determine seismic stresses and displacements on the underlying surface and on the ridge of the array, depending on the frequency and amplitude of the incident seismic wave. The results obtained make it possible to perform further estimated calculations on the violation of the integrity of the massif and its partial or complete collapse into the river stream.

Keywords: shear vibrations of the array, resistance coefficient, slope angle of the array, hypothesis of Sorokin, hypothesis of Kelvin-Voigt.

For citation: Muzaev I.D., Harebov K.S., Muzaev N.I. Mathematical modeling of shear seismic vibrations of an array consisting of recultivated material deposits of the mining industry (tailings). *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii* = *Geology and Geophysics of Russian South*. (in Russ.). 2022. 12(2): 19-33. DOI: [10.46698/VNC.2022.34.57.002](https://doi.org/10.46698/VNC.2022.34.57.002).

Введение

Одним из негативных источников техногенного воздействия на экосистему окружающей среды являются хранилища хвостов. В них постоянно сбрасывались и накапливались токсические отходы переработки горно-металлургической промышленности. В течение нескольких десятков лет они достигли значительных размеров, как по площади, так и по мощности (толщине). Объекты нередко расположены на

сейсмоактивных территориях в узких ущельях горных рек вблизи речного потока. Тем самым создается экологическая угроза речной системе с точки зрения обрушения накопленного материала в речной поток.

На рисунке 1 представлен схематический чертеж такого хранилища, расположенного на берегу реки Ардон в республике Северная Осетия-Алания [Гурбанов и др., 2012; Матвеев, 2004]. После недавних рекультивационных работ в хранилище, накопленный материал застлан сверху балластовым материалом в виде массива, имеющего призматическую форму с трапециевидальным поперечным сечением, нависающим над потоком реки.

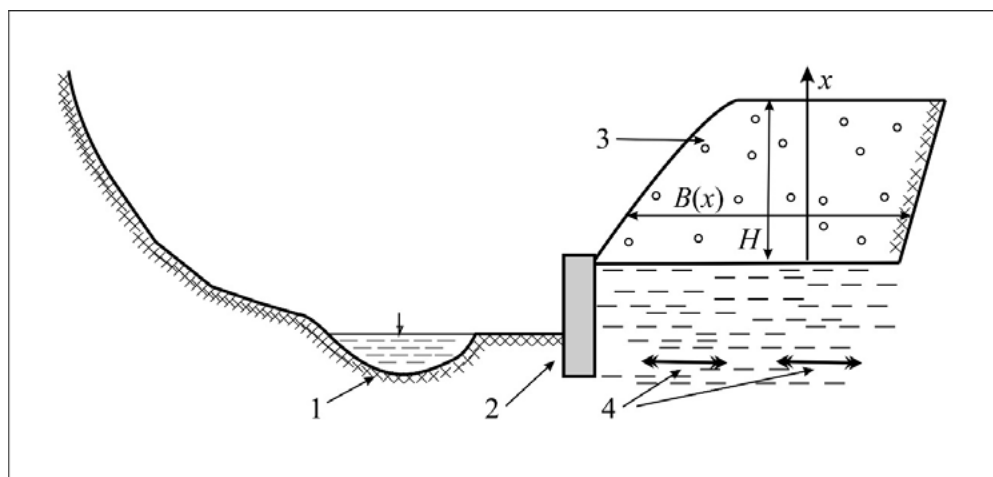


Рис. 1. Расчётная схема начально-краевой задачи. 1 – речной поток; 2 – подпорная стена; 3 – хвосты; 4 – сейсмическая волна /

Fig. 1. Calculation scheme of the initial boundary value problem. 1 – riverflow; 2 – retaining wall; 3 – tails; 4 – seismic wave

Углы наклона откосов массива не превышают угла естественного откоса материала отложения (37° – 45°). В настоящее время массив находится в статически устойчивом состоянии. Материал, слагающий массив, представляет сплошную деформируемую среду со своими физико-механическими характеристиками (модуль упругости, модуль сдвига, плотность материала, коэффициент внутреннего сопротивления движению, коэффициент Кулоновского трения, коэффициент сцепления). Данная работа посвящена проблеме колебательного движения рассматриваемого массива и возможного его перехода в динамически неустойчивое состояние в случае падения на его подстилающую поверхность сейсмической волны. Кроме того, к грани массива примыкает Транскавказская автомагистраль, где имеет место круглосуточное интенсивное движение автотранспорта. Тем самым массив находится в постоянном микроколебательном движении (дрожит). Не исключено, что в какой-то момент времени частота микроколебаний массива совпадет с частотой собственных колебаний массива. В этом случае, из-за резонанса, возникшие напряжения в массиве могут превзойти разрушающее напряжение материала массива. Массив окажется в динамически неустойчивом состоянии, что может привести к обрушению в пойму реки и даже вторжению массива в поток реки.

Известно, что поперечные сдвиговые колебания рыхлых массивов горной породы (оползневые массивы, отвалы, земляные дамбы, накопленный материал отло-

жений в хвостохранилищах и др.) механико-математически наиболее адекватно моделируются начально-краевыми задачами математической физики, поставленными для следующих дифференциальных уравнений в частных производных [Ворович и др., 1999; Кошляков и др., 1970; Скучик, 1971; Слепян, 1972; Шульман, 1976; Bonnet, Heize, 1995]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v_s^2 (1 + i\eta_*) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \beta_* v_s^2 \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) = 0, \quad (0.2)$$

где приняты следующие обозначения: $U(x, t)$ – искомая функция выражающая поперечные сдвиговые перемещения в теле массива; $B(x)$ – ширина массива в общем случае зависящая от вертикальной координаты из-за трапецеидальной формы вертикального разреза в массиве, как показано на рисунке 1; i – мнимая единица; t – время; v_s – скорость распространения сдвиговых перемещений в массиве, которая вычисляется по формуле:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (0.3)$$

где G – модуль сдвига; ρ – плотность материала массива.

Согласно гипотезе Е.С. Сорокина [Сорокин, 1956] в дифференциальном уравнении (0.1) через постоянный коэффициент η_* , называемый коэффициентом потерь, учтена диссипация энергии колебания на преодоление внутреннего сопротивления в среде. В дифференциальном уравнении (0.2) диссипация энергии учтена через коэффициент β_* называемый коэффициентом вязкого сопротивления в согласии с гипотезой Кельвина-Фойгта [Скучик, 1971; Слепян, 1972]. Оба эти априорные коэффициенты при гармоническом колебании среды взаимосвязаны зависимостью $\eta_* = \omega \beta_*$, где ω – круговая частота гармонических колебаний массива.

1. Постановка начально-краевых задач моделирующих поперечные сдвиговые сейсмические колебания массива

Согласно гипотезам Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта поперечные сдвиговые сейсмические колебания рассматриваемого массива моделируются дифференциальными уравнениями (0.1) и (0.2) которые в развернутом виде запишутся так [Ворович и др., 1999; Заалишвили и др., 2007; Кошляков и др., 1970; Музаев и др., 2014; Хачиян, 2009]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v_s^2 (1 + i\eta_*) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{B'(x)}{B(x)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v_s^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{B'(x)}{B(x)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \beta_* v_s^2 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + \frac{B'(x)}{B(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) = 0, \quad (1.2)$$

В соответствии с нашей целью для этих дифференциальных уравнений необходимо поставить следующие начальные и граничные условия:

$$U(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$U(x, t)|_{x=0} = \frac{k_s g}{\omega^2} e^{i\omega t}, \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0, \quad (1.4)$$

где k_s – сейсмический коэффициент местности; ω – круговая частота подающей на подстилающую поверхность массива сейсмической волны. Величина $\frac{k_s g}{\omega^2}$ представляет амплитуду перемещения сейсмической волны вдоль подстилающей поверхности.

Дифференциальное уравнение (1.1) совместно с начальными условиями (1.3) и граничными условиями (1.4) в совокупности представляют начально-краевую задачу математической физики и моделируют сейсмические колебания рассматриваемого массива согласно гипотезе Е.С. Сорокина. Дифференциальное уравнение (1.2) совместно с начальными условиями (1.3) и граничными условиями (1.4) в совокупности представляют начально-краевую задачу математической физики и моделируют сейсмические колебания рассматриваемого массива согласно гипотезе Кельвина-Фойгта.

Фактически проблема смоделирована двумя разными начально-краевыми задачами математической физики в соответствии с принятыми во всем мире двумя гипотезами в классических научных литературных источниках. Пристальный интерес представляет вопрос о том, что в какой из двух составленных моделей наиболее адекватно и правдоподобно отражены физико-механические процессы, происходящие в колеблющемся массиве. В связи с этим в данной работе решены обе выше представленные начально-краевые задачи, сопоставлены между собой совокупности полученных расчетных формул, а также результаты вычислительных экспериментов по определению перемещений и напряжений в исследуемом колеблющемся массиве.

В дифференциальных уравнениях (1.1) и (1.2) один коэффициент является комплексной величиной, а другой коэффициент $\frac{B'(x)}{B(x)}$ – функцией от пространственной координаты x . Эти особенности в дифференциальных уравнениях, создают большие математические трудности в попытках решения задач аналитическими методами математической физики. В общем случае, при произвольной функции $\frac{B'(x)}{B(x)}$ задача не была решена никем в мире.

Мы предлагаем решение поставленных задач в одном частном случае, при экспоненциальной зависимости ширины $B(x)$ массива от координаты x :

$$B(x) = B_0 e^{Sx}, \quad (1.5)$$

где B_0 – ширина массива у её подстилающей поверхности. Форм параметр S определяется по следующей зависимости:

$$S = \frac{1}{H} \ln \frac{B(H)}{B(0)} = \text{const} \quad (1.6)$$

где $B(H)$ – ширина массива на свободной поверхности, $B(0)=B_0$ – ширина массива у её подстилающей поверхности, H – толщина (мощность) массива.

2. Решение начально-краевой задачи поставленной согласно с гипотезой Е.С. Сорокина

В этом случае, с учетом принятых упрощающих предположений (1.5) и (1.6) переменный коэффициент в дифференциальном уравнении (1.1) становится постоянной величиной. В результате применения следующей подстановки:

$$U(x, t) = A_0 e^{i\omega t} + e^{\frac{s}{2}x} V(x, t), \quad (2.1)$$

начально-краевая задача (1.1), (1.3), (1.4) через введенную функцию $V(x, t)$, перепишется так:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_s^2 (1 + i\eta_*) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{s^2}{4} V \right) = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} e^{-\frac{s}{2}x}, \quad (2.2)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$V|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{s}{2} V \right) \Big|_{x=H} = 0, \quad (2.4)$$

где:

$$A_0 = \frac{k_s g}{\omega^2}, \quad (2.5)$$

Решение дифференциального уравнения (2.2) можно искать в виде следующего тригонометрического ряда [Bonnet, Heize, 1995]:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin \mu_n \frac{x}{H}, \quad (2.6)$$

где μ_n – положительные корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{\mu_n}{H} \cos \mu_n + \frac{s}{2} \sin \mu_n = 0. \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \mu_n = -\frac{2\mu_n}{sH} \quad (2.7)$$

Последовательность функций:

$$\sin \mu_1 \frac{x}{H}, \sin \mu_2 \frac{x}{H}, \dots, \sin \mu_n \frac{x}{H}, \dots \quad (2.8)$$

является ортогональной системой тригонометрических функций на интервале $(0; H)$. В связи с этим функцию $e^{-\frac{s}{2}x}$ можно разложить в ряд Фурье по ортогональной системе функций (2.8):

$$e^{-\frac{s}{2}x} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin \mu_n \frac{x}{H}. \quad (2.9)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выражение (2.6) удовлетворяет граничным условиям (2.4) если только μ_n корень характеристического уравнения (2.7). В результате подстановки рядов (2.6) и (2.9) в дифференциальное уравнение (2.2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых синусах в левой и правой частях уравнения (2.2) относительно неизвестных функций $V_n(t)$ получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} + v_s^2 \left(\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{s^2}{4} \right) (1 + i\eta_*) V_n = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} \delta_n \quad (2.10)$$

с двумя нулевыми начальными условиями:

$$V_n|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dV_n}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (2.11)$$

$$\delta_n = \frac{\int_0^H e^{\frac{S}{2}x} \sin \mu_n \frac{x}{H} dx}{\int_0^H \sin^2 \mu_n \frac{x}{H} dx}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Коэффициент дифференциального уравнения (2.10) представляет комплексную величину $(1+i\eta_*)$. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами до настоящего времени не разработана, и в справочных литературных источниках по математике она не отражена. В связи с этим вынуждены выделить из (2.10) действительную и мнимую части в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} V_n(t) &= \varphi_n(t) + i\psi_n(t) \\ \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + v_s^2 r_n^2 \varphi_n - v_s^2 r_n^2 \eta_* \psi_n &= A_0 \omega^2 \delta_n \cos \omega t, \\ \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} + v_s^2 r_n^2 \psi_n + v_s^2 r_n^2 \eta_* \varphi_n &= A_0 \omega^2 \delta_n \sin \omega t, \\ \varphi_n|_{t=0} = \varphi'_n|_{t=0} = \psi_n|_{t=0} = \psi'_n|_{t=0} &= 0, r_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{S^2}{4}} \\ \frac{d^4 \varphi_n}{dt^4} + 2a^2 r_n^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + v_s^4 r_n^4 (1 + \eta_*^2) \varphi_n &= R_1 \cos \omega t + R_2 \sin \omega t, \\ \frac{d^4 \psi_n}{dt^4} + 2v_s^2 r_n^2 \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} + v_s^4 r_n^4 (1 + \eta_*^2) \psi_n &= -R_2 \cos \omega t + R_1 \sin \omega t, \\ R_1 &= A_0 \omega^2 \delta_n (v_s^2 r_n^2 - \omega^2), R_2 = A_0 \omega^2 \delta_n v_s^2 r_n^2 \eta_*, \\ \varphi_n|_{t=0} = \varphi'_n|_{t=0} = \psi_n|_{t=0} = \psi'_n|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ φ_n и ψ_n ограничены:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{1}{\Delta_n} \left[R_{1,n} \left(\cos \omega t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t + \frac{\alpha_n}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) + \right. \\ &\quad \left. + R_{2,n} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) \right] \\ \psi_n(t) &= \frac{1}{\Delta_n} \left[R_{1,n} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) - \right. \\ &\quad \left. - R_{2,n} \left(\cos \omega t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t - \frac{\alpha_n}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) \right] \\ \alpha_n &= v_s r_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta_*^2}-1}{2}}, \beta_n = v_s r_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta_*^2}+1}{2}}, \delta_n = \frac{4\mu_n \int_0^H e^{\frac{S}{2}x} \sin \mu_n \frac{x}{H} dx}{(2\mu_n - \sin 2\mu_n)H}, \\ \Delta_n &= (v_s^2 r_n^2 - \omega^2)^2 + (v_s^2 r_n^2 \eta_*)^2, \end{aligned}$$

Обратным ходом, следуя по выражениям (2.6) – (2.4) и далее, для вычисления сдвиговых сейсмоперемещений на вершине (гребне) массива, а также для сдвиговых сейсмонапряжений на подстилающей поверхности массива получается следующая совокупность расчетных формул:

$$\begin{aligned} U(H, t) &= A_0 \cos \omega t - e^{\frac{S}{2}H} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\alpha_n t} \left[\frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \beta_n t + \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \frac{R_{1,n}}{\Delta_n} + \frac{\omega}{\beta_n} \frac{R_{2,n}}{\Delta_n} \right) \sin \beta_n t \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \omega t + \frac{R_{2,n}}{\Delta_n} \sin \omega t \right) \right\} \sin \mu_n \\ \tau(0, t) &= -G \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\alpha_n t} \left[\frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \beta_n t + \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \frac{R_{1,n}}{\Delta_n} + \frac{\omega}{\beta_n} \frac{R_{2,n}}{\Delta_n} \right) \sin \beta_n t \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \omega t + \frac{R_{2,n}}{\Delta_n} \sin \omega t \right) \frac{\mu_n}{H} \right\} \end{aligned}$$

3. Решение начально-краевой задачи поставленной согласно с гипотезой Кельвина-Фойгта

Также как в предыдущем разделе 2 в этом случае в результате применения подстановки (2.1) начально-краевая задача (1.2), (1.3), (1.4) относительно новой искомой функции $V(x, t)$ переписывается так:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v_s^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{S^2}{4} V \right) - \beta_* v_s^2 \left(\frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x^2} - \frac{S^2}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right) = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} e^{-\frac{S}{2}x}, \quad (3.1)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.2)$$

$$V|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{S}{2} V \right) \Big|_{x=H} = 0, \quad (3.3)$$

В результате разложения в тригонометрические ряды функций $V(x, t)$ и $e^{-\frac{S}{2}x}$ в соответствии с разложением (2.6) и (2.8) для искомой функции $V_n(t)$ получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} + v_s^2 r_n^2 \beta_* \frac{dV_n}{dt} + v_s^2 r_n^2 V_n = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} \delta_n, \quad (3.4)$$

со следующими двумя начальными условиями:

$$V_n|_{t=0} = 0, \quad \frac{dV_n}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.5)$$

Решение поставленной задачи Коши (3.4) – (3.5) имеет следующий вид:

$$V_n(t) = \begin{cases} -Be^{-\alpha_n t} \left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} + i \frac{\omega}{\beta_n} \right) \sin \beta_n t + \cos \beta_n t \right] + Be^{i\omega t}, & n \leq k \\ B \frac{-(\lambda_2 + i\omega)e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_1 + i\omega)e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + Be^{i\omega t}, & n > k \end{cases}$$

$$B = \frac{A_0 \omega^2 \delta_n [(a^2 r_n^2 - \omega^2) - i \beta_* a^2 r_n^2 \omega]}{(a^2 r_n^2 - \omega^2)^2 + \beta_*^2 a^4 r_n^4 \omega^2},$$

$$\alpha_n = \frac{\beta_* a^2 r_n^2}{2}, \beta_n = ar_n \sqrt{1 - \frac{\beta_*^2 a^2 r_n^2}{4}}, \lambda_1 = \alpha_n - \bar{\beta}_n, \lambda_2 = \alpha_n + \bar{\beta}_n,$$

$$\bar{\beta}_n = ar_n \sqrt{\frac{\beta_*^2 a^2 r_n^2}{4} - 1}, r_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{S^2}{4}}$$

Далее обратным ходом и выделения действительной части из полученных комплексных выражений для перемещения на гребне рассматриваемого массива и для напряжения на подстилающей поверхности массива получена следующая совокупность расчетных формул:

$$U(H, t) = A_0 \cos \omega t + e^{\frac{SH}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [V_n(t) + B_{1,n} \cos \omega t + B_{2,n} \sin \omega t] \sin \mu_n,$$

$$\tau(0, t) = G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{H} [V_n(t) + B_{1,n} \cos \omega t + B_{2,n} \sin \omega t],$$

$$V_n(t) = \begin{cases} -e^{-\alpha_n t} \left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} B_{1,n} + \frac{\omega}{\beta_n} B_{2,n} \right) \sin \beta_n t + B_{1,n} \cos \beta_n t \right], & n \leq k \\ \frac{B_{1,n} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) - \omega B_{2,n} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1}, & n > k \end{cases}$$

$$B_{1,n} = \frac{A_0 \omega^2 \delta_n (a^2 r_n^2 - \omega^2)}{\Delta_n}, B_{2,n} = \frac{A_0 \omega^3 \beta_* a^2 r_n^2 \delta_n}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n = (a^2 r_n^2 - \omega^2)^2 + \beta_*^2 a^4 r_n^4 \omega^2$$

Натуральное число « k » определяется из следующего неравенства:

$$\mu_n < \frac{2}{\beta_* a}$$

4. Математический анализ полученных двух совокупностей расчетных формул. Компьютерные вычислительные эксперименты и их сопоставления

В частном случае, при нулевом значении форм параметра $S=0$, полученные две совокупности расчетных формул незначительно упрощаются и принимают следующие виды.

Совокупность расчетных формул в рамках гипотезы Е.С. Сорокина:

$$U(H, t) = A_0 \cos \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n t} f_{1,n}(t) \sin a_n H + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2,n}(t) \sin a_n H, \quad (4.1)$$

$$\tau(0, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n t} f_{1,n}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_{2,n}(t), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n-1)\pi}{2H}, \alpha_n = v_s a_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\omega^2 \beta_*^2} - 1}{2}}, \beta_n = v_s a_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\omega^2 \beta_*^2} + 1}{2}}, \delta_n = \frac{2}{a_n H}, \\ \Delta &= (v_s^2 a_n^2 - \omega^2)^2 + (v_s^2 a_n^2 \eta_*)^2, \\ f_{1,n}(t) &= \frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \beta_n t + \left(\frac{\alpha_n R_{1,n}}{\beta_n \Delta_n} + \frac{\omega R_{2,n}}{\beta_n \Delta_n} \right) \sin \beta_n t \\ f_{2,n}(t) &= \frac{R_{1,n}}{\Delta_n} \cos \omega t + \frac{R_{2,n}}{\Delta_n} \sin \omega t \\ R_{1,n} &= A_0 \omega^2 \delta_n (v_s^2 a_n^2 - \omega^2), R_{2,n} = A_0 \omega^2 \delta_n v_s^2 a_n^2 \eta_* \end{aligned}$$

Совокупность расчетных формул в рамках гипотезы Кельвина-Фойгта:

$$\begin{aligned} U(H, t) &= A_0 \cos \omega t - \sum_{n=1}^k V_n(t) e^{-\alpha_n t} \sin a_n H + \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \bar{V}_n(t) \sin a_n H + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (B_{1,n} \cos \omega t + B_{2,n} \sin \omega t) \sin a_n H \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \tau(0, t) &= -G \sum_{n=1}^k a_n V_n(t) e^{-\alpha_n t} + \frac{G}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \bar{V}_n(t) \sin a_n H + \\ &+ G \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B_{1,n} \cos \omega t + B_{2,n} \sin \omega t), \\ V_n(t) &= B_{1,n} \cos \beta_n t + \left(\frac{\omega}{\beta_n} B_{2,n} + \frac{\alpha_n}{\beta_n} B_{1,n} \right) \sin \beta_n t \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(t) &= \left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 \right) B_{1,n} + \frac{\omega}{\beta_n} B_{2,n} \right] e^{-(\alpha_n + \bar{\beta}_n)t} - \\ &- \left[\left(\frac{\alpha_n}{\bar{\beta}_n} + 1 \right) B_{1,n} + \frac{\omega}{\bar{\beta}_n} B_{2,n} \right] e^{-(\alpha_n - \bar{\beta}_n)t} \\ \alpha_n &= \frac{\beta_* v_s^2 a_n^2}{2}, \beta_n = v_s a_n \sqrt{1 - \frac{\beta_*^2 v_s^2 a_n^2}{4}}, \bar{\beta}_n = v_s a_n \sqrt{\frac{\beta_*^2 v_s^2 a_n^2}{4} - 1}, \\ \Delta_n &= (v_s^2 a_n^2 - \omega^2)^2 + \beta_*^2 v_s^4 a_n^4 \omega^2 \\ B_{1,n} &= \frac{A_0 \omega^2 \delta_n (v_s^2 a_n^2 - \omega^2)}{\Delta_n}, B_{2,n} = \frac{A_0 \omega^3 \beta_* \delta_n v_s^2 a_n^2}{\Delta_n}. \end{aligned}$$

Результаты работы и их обсуждение

Выполнены вычислительные эксперименты по совокупности расчетных формул (4.1) и (4.2) полученных в рамках гипотезы Е.С. Сорокина и по совокупности расчетных формул (4.3) и (4.4) полученных в рамках гипотезы Кельвина-Фойгта.

В качестве конкретных примеров рассмотрены два варианта. В первом варианте входным параметрам присваивались следующие числовые значения: мощность (толщина) массива $H = 100$ м; модуль сдвига материала массива $G = 7,2 \cdot 10^8$ Н/м²; плотность материала $\rho = 2000$ кг/м³; коэффициент вязкого сопротивления $\beta_* = 0,02$ с; коэффициент потерь в модели Е.С. Сорокина $\eta_* = \beta_* \omega$, где ω – круговая частота колебаний массива, т.е. круговая частота падающей сейсмической волны; амплитуде падающей на подстилающую поверхность массива гармонической сейсмической волны присваивалось значение $A_0 = 0,004$ м; а её круговой частоте присваивали значение первой (основной) резонансной частоты $\omega = \omega_1 = v_s \cdot a_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \frac{\pi}{2H} = 3\pi$.

Эти числовые значения входных параметров примерно соответствуют физико-механическим характеристикам пород поверхностных слоев земли (галечник, гравий, туфы) и семибалльной интенсивности землетрясения [Шульман, 1976; Заалишвили, 2009; Аптикаев, 2020; Заалишвили и др., 2007; Курбацкий и др., 2016; Huang Jyun-Yan et al., 2020; Yin-Min Wu et al., 2003; Zaalishvili et al., 2019a, b, 2021].

На рисунке 2 представлены графики зависимости от времени перемещений гребня массива вычисленные по моделям Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта, т.е. графики зависимости функции $U(H,t)$, вычисленные по формулам (4.1) и (4.3).

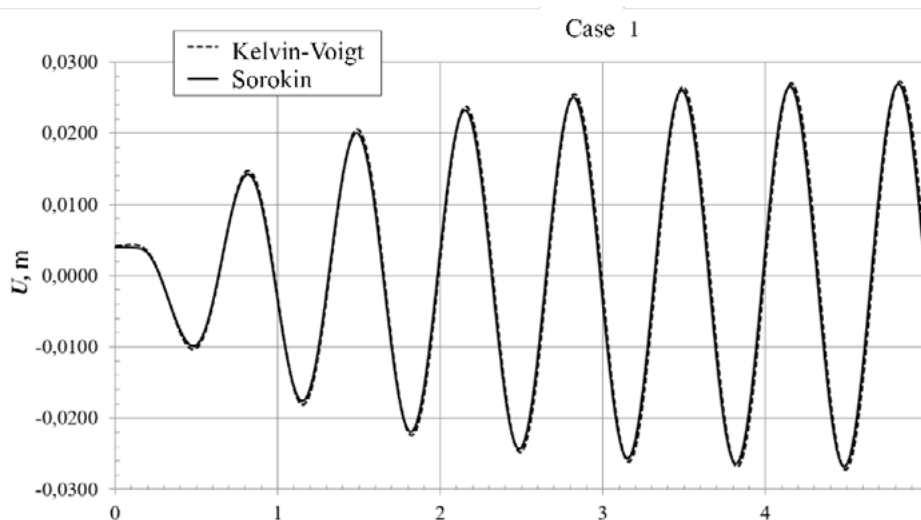


Рис. 2. Графики зависимости от времени перемещений гребня массива вычисленные по моделям Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта /

Fig. 2. Graphs of the dependence on the time of movement of the ridge of the array calculated from the models of E.S. Sorokin and Kelvin-Voigt

На рис. 3 представлены графики зависимости от времени сейсмонапряжений $\tau(0,t)$ на подстилающей поверхности массива, вычисленные по формулам (4.2) и (4.4) в соответствии с гипотезой С.А. Сорокина и гипотезой Кельвина-Фойгта.

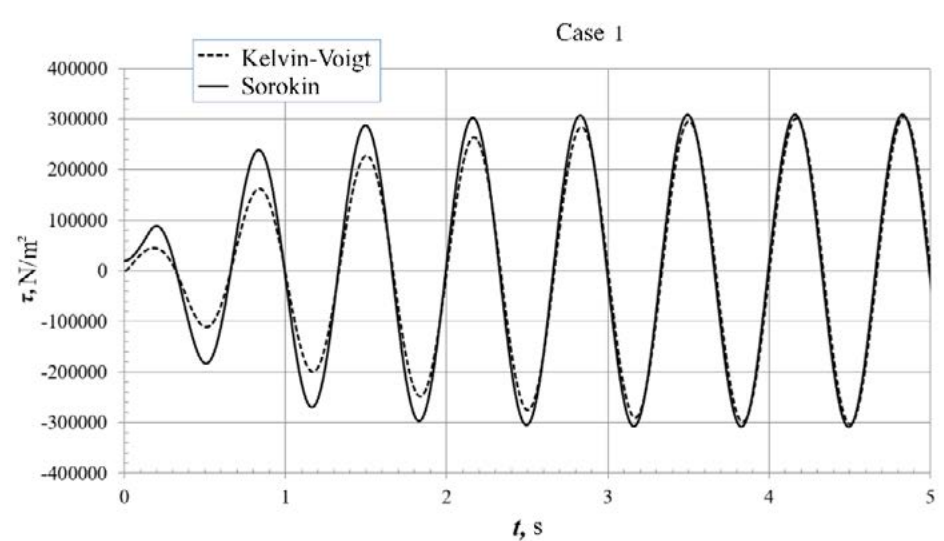


Рис. 3. Графики зависимости от времени сейсмонапряжений $\tau(0,t)$ на подстилающей поверхности массива вычисленные по моделям Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта /

Fig. 3. Graphs of the dependence on the time of seismic stresses $\tau(0,t)$ on the underlying surface of the array calculated from the models of E.S. Sorokin and Kelvin-Voigt

На рисунках 4 и 5 представлены аналогичные графики для второго варианта, в котором мощность массива $H = 75$ м. Остальным входным параметрам присвоены значения от первого варианта.

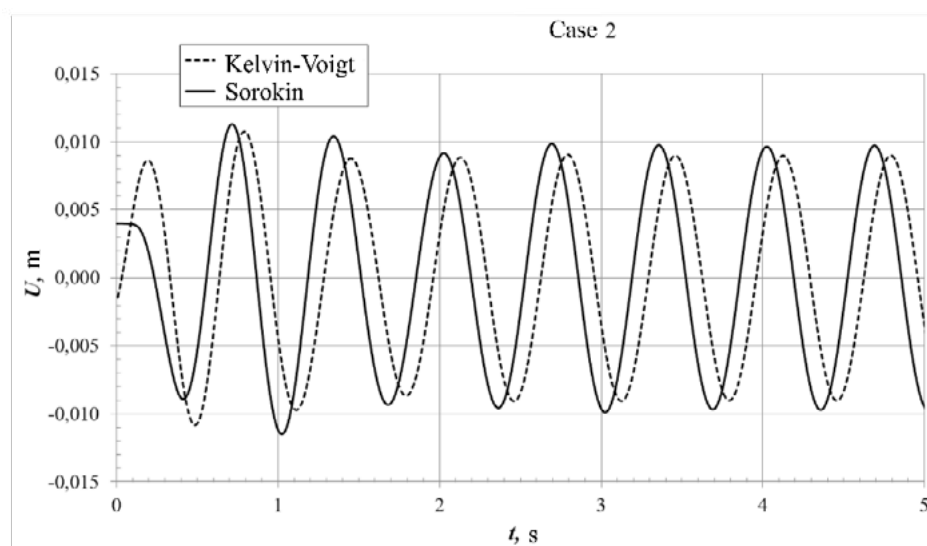


Рис. 4. Графики зависимости от времени перемещений гребня массива вычисленные по моделям Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта /

Fig. 4. Graphs of the dependence on the time of movement of the ridge of the array calculated from the models of E.S. Sorokin and Kelvin-Voigt

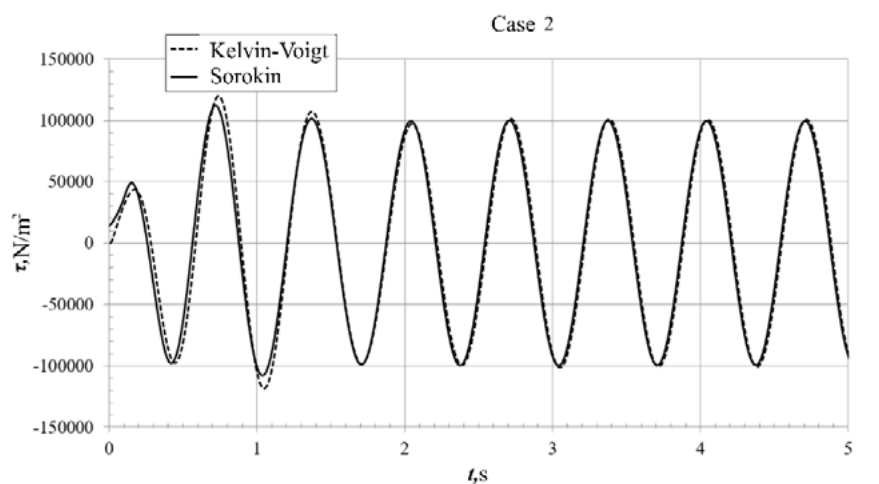


Рис. 5. Графики зависимости от времени сейсмонапряжений $\tau(0,t)$ на подстилающей поверхности массива вычисленные по моделям Е.С. Сорокина и Кельвина-Фойгта /

Fig. 5. Graphs of the dependence on the time of seismic stresses $\tau(0,t)$ on the underlying surface of the array calculated from the models of E.S. Sorokin and Kelvin-Voigt

Проведенные сопоставительные вычислительные эксперименты показали следующее. Рассмотренные в статье общеизвестные два механико-математические модели одного и того-же сейсмоколебательного процесса в массиве визуально (внешне) существенно отличаются, так же как существенно отличаются друг от друга совокупности расчетных формул, полученных на основе рассмотренных двух моделей. Тем не менее, числовые результаты по напряжениям и деформациям в колеблющемся массиве полученные на основе рассмотренных двух моделей практически идентичны.

Максимальное касательное напряжение в рассматриваемом примере составляет $\tau_{max}=3 \cdot 10^5$ Н/м². Такая величина сейсмонапряжения в 1,5 раза превосходит несущую способность мелких песчаных и глинистых грунтов. Тем самым создается серьезная опасность обрушения массива в речной поток.

ВЫВОДЫ

Поставлены и решены две начально-краевые задачи математической физики, моделирующие сдвиговые сейсмические колебания массива, состоящего из отходного материала хвостохранилища. Движение массива вызвано падением сейсмической волны на его подстилающую поверхность. Пристальный взгляд к подобным прикладным задачам обусловлен тем, что нередко такие массивы расположены в узком ущелье реки, вблизи речного потока. При сеймотектонических ситуациях создается потенциальная экологическая опасность речной системе региона из-за возможного обрушения в речной поток токсичного материала массива.

Одна задача поставлена и решена в рамках гипотезы Е.С. Сорокина, относительно диссипации энергии, обусловленной внутренним сопротивлением среды. Другая задача поставлена и решена в рамках гипотезы Кельвина-Фойгта.

Доказано утверждение о том, что, хотя математическая модель колебательного процесса в массиве, основанная на гипотезе Е.С. Сорокина, визуально существенно отличается от математической модели колебательного процесса в том же массиве,

основанная на гипотезе Кельвина-Фойгта, однако по числовым значениям напряженно-деформированного состояния колеблющегося массива эти две общеизвестные модели практически идентичны.

Доказано утверждение о том, что в случае падения на массив околорезонансной сейсмической волны, интенсивностью от семи баллов и выше, в массиве провоцируются сейсмонапряжения, в разы превосходящие несущую способность мелких песчаных и глинистых грунтов, имеющих сходство с материалом хвостохранилища. Тем самым создается опасность обрушения массива в пойму реки.

Литература

1. Аптикаев Ф.Ф. Новые строительные нормы: шаг вперед, два шага назад. // Геология и геофизика Юга России. – 2020. – Т. 10. №2. – С. 71–81. DOI: 10.46698/VNC.2020.50.57.005
2. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. – М.: Научный Мир, 1999. – 246 с.
3. Гурбанов А.Г. и др. Промышленные отходы Мизурской горно-обогатительной фабрики Садонского свинцово-цинкового комбината: геохимические особенности, оценка их воздействия на экологическую обстановку прилегающих территорий (почвы и воду р. Ардон). Республика Северная Осетия-Алания. // Вестник Владикавказского научного центра РАН. – 2012. – Т. 12. №4. – С. 29–40.
4. Заалишвили В.Б. Сейсмическое микрорайонирование территорий городов, населенных пунктов и больших строительных площадок. – М.: Наука, 2009. – 350 с.
5. Заалишвили В.Б., Музаев И.Д., Туаева Ж.Д. Математическое моделирование сейсмических колебаний грунтовой толщи в основании застройки. // Труды международной научно-практической конференции «Опасные природные и техногенные геологические процессы на горных и предгорных территориях Северного Кавказа». – Владикавказ. – 2007. – С. 290–298.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 767 с.
7. Курбацкий Е.М., Косауров А.П. К вопросу о пересчете балльности в ускорения колебаний грунта. // Инженерные изыскания. – 2016. – №14. – С. 50–60.
8. Матвеев А.А. и др. Геохимическая оценка воздействия Унальского хвостохранилища Садонского свинцово-цинкового комбината (Северная Осетия-Алания) на окружающую среду. // Известия секции наук о Земле Российской академии наук. – 2004. – Вып. 12. – С. 136–147.
9. Музаев И.Д., Музаев Н.И., Харебов К.С. Постановка и решение многослойной краевой задачи сейсмических колебаний высотного сооружения. // Сейсмическое строительство, безопасность сооружений. – 2014. – №1. – С. 22–25.
10. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. – М.: МИР, 1971. – 274 с.
11. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 371 с.
12. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Госстройиздат, 1956. – 336 с.
13. Хачиян Э.Е. Задача усиления или ослабления эффекта сейсмического воздействия на поверхности земли. // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко «Исследования по теории сооружений». 2009. – №1(XXVI). – С. 67–80.
14. Шульман С.Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. – М.: Энергия, 1976. – 336 с.
15. Bonnet G., Heize J.F. Non linear seismic response of a soft layer. // 10th European conference on Earthquake Engineering. Duma (et). – Balkema, Rotterdam. – 1995. – pp. 361–364.
16. Huang Jyun-Yan, Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Chun-Hsiang Kuo, Kuo-Liang Wen, Chun-Te Chen. Progress of Soil Nonlinearity Researches of Recent Years in Russia and Taiwan. //

Geology and Geophysics of Russian South. – 2020. – Vol. 10. No.2. – pp. 95-112. DOI: 10.46698/VNC.2020.28.93.007.

17. Yin-Min Wu, Ta Liang Teng, Tzay-Chyn Shin, Nai-Chi Hsiao. Relationship between PGA, Ground PGV and I (MM) in Taiwan. // *BSSA*. – 2003. – Vol. 93(1). – pp. 386-396.

18. Zaalishvili V.B., Burdzieva O.G., Kanukov A.S., Melkov D.A. Seismic Risk of Modern City. // *The Open Construction & Building Technology Journal*. – 2019. – Vol. 13. – pp. 308-318. DOI: 10.2174/1874836801913010308

19. Zaalishvili V.B., Chernov Yu.K. The influence of the rate of increase of ground vibration accelerations during earthquakes on the value of the observed macroseismic effect. // *Open Construction and Building Technology Journal*. – 2021. – Vol. 15. – pp. 70-80. DOI: 10.2174/1874836802115010070

20. Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Kanukov A.S., Fidarova M.I., Persaeva Z.V. Vladikavkaz city seismological network database. // *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies EMMFT 2019. "Advances in Intelligent Systems and Computing"*. – 2021. – pp. 57-63. DOI: 10.1007/978-3-030-57453-6_6

References

1. Aptikaev F.F. New building codes: one step forward, two steps back. *Geology and geophysics of the South of Russia*. 2020. Vol. 10. No. 2. pp. 71–81. DOI: 10.46698/VNC.2020.50.57.005 (In Russ.)

2. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media. Moscow, Nauchnyi Mir, 1999. – 246 p. (In Russ.)

3. Gurbanov A.G. Industrial wastes of the Mizurmining and processing plant of the Sadon lead-zinc plant: geochemical features, assessment of their impact on the environmental situation of adjacent territories (soils and water of the Ardon River). Republic of North Ossetia-Alania. Bulletin of the Vladikavkaz Scientific Center of RAS. 2012. Vol. 12. No.4. pp. 29–40. (In Russ.)

4. Zaalishvili V.B. Seismic microzonation of urban territories, settlements and large construction sites. Moscow. Nauka, 2009. 350 p. (In Russ.)

5. Zaalishvili V.B., Muzaev I.D., Tuaeva Zh.D. Mathematical modeling of seismic vibrations of the soil stratum at the base of the building. In: *Proceedings Dangerous natural and technogenic geological processes in the mountainous and foothill areas of the North Caucasus*. Vladikavkaz. 2007. pp. 290–298. (In Russ.)

6. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow. Higher School, 1970. 767 p. (In Russ.)

7. Kurbatsky E.M., Kosaurov A.P. On the issue of recalculating the intensity in the acceleration of ground vibrations. *Engineering survey*. 2016. No. 14. pp. 50–60. (In Russ.)

8. Matveev A.A. Geochemical assessment of the impact of the Unal tailing dump of the Sadonsky lead-zinc plant (North Ossetia-Alania) on the environment. In: *Proceedings of the Earth Sciences Section of RAS*. 2004. Issue 12. pp. 136–147. (In Russ.)

9. Muzaev I.D., Muzaev N.I., Kharebov K.S. Statement and solution of a multilayer boundary value problem of seismic vibrations of a high-rise structure. *Seismic construction, safety of structures*. 2014. No. 1. pp. 22–25. (In Russ.)

10. Skuchik E. Simple and complex vibratory systems. Moscow. MIR, 1971. 274 p. (In Russ.)

11. Slepian L.I. Non-stationary elastic waves. Leningrad. Sudostroenie, 1972. 371 p. (In Russ.)

12. Sorokin E.S. Dynamic calculation of load-bearing structures of buildings. Moscow: Gosstroyizdat, 1956. – 336 p. (In Russ.)

13. Khachiyan E.E. The task of strengthening or weakening the effect of seismic load on the earth's surface. Bulletin of TsNIISK named after V.A. Kucherenko, Research on the theory of structures. 2009. No. 1(XXVI). pp. 67–80. (In Russ.)

14. Shulman S.G. Calculations of seismic resistance of hydraulic structures, taking into account the influence of the aquatic environment. Moscow. Energiya, 1976. 336 p. (In Russ.)

15. Bonnet G., Heize J.F. Non linear seismic response of a soft layer. In: 10th European conference on Earthquake Engineering. Duma (et). Balkema, Rotterdam. 1995. pp. 361–364.
16. Huang Jyun-Yan, Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Chun-Hsiang Kuo, Kuo-Liang Wen, Chun-Te Chen. Progress of Soil Nonlinearity Researches of Recent Years in Russia and Taiwan. *Geology and Geophysics of Russian South*. 2020. Vol. 10. No.2. pp. 95–112. DOI: 10.46698/VNC.2020.28.93.007.
17. Yin-Min Wu, Ta Liang Teng, Tzay-Chyn Shin, Nai-Chi Hsiao. Relationship between PGA, Ground PGV and I (MM) in Taiwan. *BSSA*. 2003. Vol. 93. Issue 1. pp. 386–396.
18. Zaalishvili V.B., Burdzieva O.G., Kanukov A.S., Melkov D.A. Seismic Risk of Modern City. *The Open Construction & Building Technology Journal*. 2019. Vol. 13. pp. 308–318. DOI: 10.2174/1874836801913010308
19. Zaalishvili V.B., Chernov Yu.K. The influence of the rate of increase of ground vibration accelerations during earthquakes on the value of the observed macroseismic effect. *Open Construction and Building Technology Journal*. 2021. Vol. 15. pp. 70–80. DOI: 10.2174/1874836802115010070
20. Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Kanukov A.S., Fidarova M.I., Persaeva Z.V. Vladikavkaz city seismological network database. In: *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies EMMFT 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021. pp. 57–63. DOI: 10.1007/978-3-030-57453-6_6