

## ГЕОТЕКТОНИКА И ГЕОДИНАМИКА

УДК 532 (075.8)

DOI: [10.46698/VNC.2021.23.31.006](https://doi.org/10.46698/VNC.2021.23.31.006)

Оригинальная статья

# Механико-математическое моделирование сейсмических сдвиговых колебаний ледникового массива

И. Д. Музаев , К. С. Харебов , Н. И. Музаев 

Геофизический институт Владикавказского научного центра  
Российской академии наук, Россия, 362002, РСО-Алания, г. Владикавказ,  
ул. Маркова, 93а, e-mail: [kosta7x7@yandex.ru](mailto:kosta7x7@yandex.ru)

Статья поступила: 01.06.2021, доработана: 07.07.2021, принята к публикации: 15.07.2021

**Резюме: Актуальность работы.** В статье впервые в мире разработаны теоретические положения сдвиговых сейсмических колебаний ледникового массива. Актуальность представленных научных разработок в приложении к инженерной сейсмологии и гляциологии обусловлено тем, что в недавнее время в различных регионах нашей планеты имели место внезапные срывы с гор грандиозных масс льда, что приводило к образованию мощных гляциальных селевых потоков. Эти потоки уничтожали населенные пункты и народохозяйственные объекты с многочисленными жертвами. Все мы помним катастрофический сход ледника Колка в Геналдонском ущелье в 2002 г., унесшего 125 человеческих жизней. Причиной срыва ледяных масс со своих подстилающих поверхностей примерзаний является динамическое воздействие, в качестве которого мы рассматриваем землетрясение. **Цель исследования.** На основе современных научных методов механики сплошных сред проведение механико-математического компьютерного моделирования колебательного процесса в ледниковом массиве, когда колебание спровоцировано гармонической сейсмической волной, упавшей на подстилающую поверхность примерзания массива. В рамках выполненного моделирования содержится постановка и решение соответствующей начально-краевой задачи. Начальными данными являются как физико-механические характеристики льда, его плотность, модуль сдвига, коэффициент внутреннего (вязкого) сопротивления, так и геометрические размеры и непризматическая конфигурация массива. Искомыми величинами в поставленной начально-краевой задаче являются перемещения и напряжения, как в самом теле массива, так и на подстилающей поверхности примерзания. **Методы исследования.** Составленная модель представляет собой начально-краевую задачу математической физики для дифференциального уравнения гиперболического типа, в котором один коэффициент является комплексной величиной, названной комплексным модулем сдвига согласно с гипотезой Е. С. Сорокина, а другой коэффициент является переменной величиной, зависящей от пространственной координаты. Эти два особых фактора создают трудности в аналитическом способе решения начально-краевых задач. В представленной работе найден путь решения поставленной задачи в частном случае – при экспоненциальной зависимости переменного коэффициента от пространственной координаты. **Результаты работы.** Получена совокупность расчётных формул для вычисления напряжений и деформаций в ледниковом массиве. Доказано утверждение о том, что низкочастотная сейсмическая около-резонансная волна может отколоть ледниковый массив от подстилающей поверхности примерзания, что приведет к образованию гляциального селевого потока.

**Ключевые слова:** ледниковый массив, комплексный модуль сдвига, поперечное сдвиговое колебание, упруго-вязкая среда, гипотеза Е. С. Сорокина, гипотеза Кельвина-Фойгта, начально-краевая задача.

**Для цитирования:** Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Механико-математическое моделирование сейсмических сдвиговых колебаний ледникового массива. *Геология и геофизика Юга России*. 2021. 11 (3): 63 – 75. DOI: [10.46698/VNC.2021.23.31.006](https://doi.org/10.46698/VNC.2021.23.31.006).

DOI: [10.46698/VNC.2021.23.31.006](https://doi.org/10.46698/VNC.2021.23.31.006)

Original paper

## Mechanical and mathematical modeling of seismic shear vibrations of a glacial massif

I. D. Muzaev , K. S. Harebov , N. I. Muzaev 

Geophysical Institute, Vladikavkaz Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, 93a Markova Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation, e-mail: [kosta7x7@yandex.ru](mailto:kosta7x7@yandex.ru)

Received: 01.06.2021, revised: 07.07.2021, accepted: 15.07.2021

**Abstract: Relevance.** Theoretical studies of seismic oscillations of the glacial massif are an urgent task in the field of engineering seismology and glaciology. This statement is confirmed if we recall the case of the sudden catastrophic collapse of the Kolka glacier in 2002, which claimed the lives of 125 human lives. **Aim.** Conducting a mechanical and mathematical simulation of the oscillatory process in a glacial massif, when the oscillation is triggered by a harmonic seismic wave that has fallen on the underlying surface of the frozen massif. Formulation and solution of the initial boundary value problem for calculating stresses and deformations in a glacial massif. **Methods.** The compiled model represents an initial boundary value problem of mathematical physics for a hyperbolic differential equation, in which one coefficient is a complex quantity called the complex shift modulus according to the hypothesis of E. S. Sorokin, and the other coefficient is a variable value depending on the spatial coordinate. These two special factors create difficulties in the analytical way of solving initial-boundary value problems. In the present paper, we find a way to solve the problem in the special case – with an exponential dependence of the variable coefficient on the spatial coordinate. **Results.** A set of calculation formulas for calculating stresses and deformations in the glacial massif is obtained. It is proved that a low-point seismic near-resonant wave can break off the glacial massif from the underlying freezing surface, which will lead to the formation of a glacial mudflow.

**Keywords:** glacial massif, complex shear modulus, transverse shear vibration, elastic-viscous medium, E. S. Sorokin hypothesis, Kelvin-Voigt hypothesis, initial-boundary value problem.

**For citation:** Muzaev I. D., Harebov K. S., Muzaev N. I. Mechanical and mathematical modeling of seismic shear vibrations of a glacial massif. *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Russian South.* (in Russ.). 2021. 11 (3): 63 – 75. DOI: [10.46698/VNC.2021.23.31.006](https://doi.org/10.46698/VNC.2021.23.31.006).

### Введение

**Постановка задачи.** Известно, что поперечные сдвиговые колебания массивов горной породы, распластанных на откосах (оползневые участки, отвалы, земляные плотины, дамбы, материал хвостохранилища в виде дамбы и др.) механико-математически наиболее адекватно моделируются начально-краевыми задачами, поставленными для следующих дифференциальных уравнений в частных производных [Ворович и др., 1999; Кошляков и др., 1970; Завриев и др., 1970; Прочность. Устойчивость. Колебания, 1968; Скучик, 1971; Слепян, 1972; Шульман, 1976; Bonnet, Heize, 1995].

$$\rho B \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - G(1 + i\eta) \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \rho g B \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\rho B \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - G \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \beta G \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) = \rho g B \sin \alpha, \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения:  $\rho$  – плотность материала массива,  $B(x)$  – переменная ширина массива, зависящая от пространственной координаты  $x$ ,  $G$  – модуль сдвига материала массива,  $U(x, t)$  – сдвиговые колебательные перемещения в массиве,  $i$  – мнимая единица,  $t$  – время.

Согласно гипотезе Е. С. Сорокина [Сорокин, 1956], в дифференциальном уравнении (1) через постоянный коэффициент  $\eta$  (в дальнейшем называемый коэффициентом потерь) учтена диссипация энергии колебания на преодоление внутреннего сопротивления в среде. В дифференциальном уравнении (2) диссипация энергии учтена через коэффициент  $\beta$  (называемый коэффициентом вязкого сопротивления) в согласии с гипотезой Кельвина-Фойгта [Прочность. Устойчивость. Колебания, 1968; Скучик, 1971; Слепян, 1972]. Оба этих априорных коэффициента при гармоническом колебании среды взаимосвязаны зависимостью:

$$\eta = \beta\omega, \quad (3)$$

где  $\omega$  – круговая частота гармонических колебаний массива.

В современной теоретической гляциологии лёд в ледниковых массивах рассматривается как упруго-вязкая среда со своими коэффициентами упругости и вязкости [Ewing et al., 1934; Glen, Perutz, 1954; Jellinek, Brill, 1956; Войтковский, 1960; Прочность. Устойчивость. Колебания, 1968; Скучик, 1971; Слепян, 1972]. В связи с этим, ниже принимается предположение о том, что при колебании ледникового массива упруго-вязкие составляющие деформации также моделируются дифференциальными уравнениями (1) и (2) в зависимости от гипотез Е. С. Сорокина либо Кельвина-Фойгта.

На рисунке 1 представлен схематический чертеж и расчетная схема задачи теоретической сейсмологии (применительно к гляциологии) о поперечном сдвиговом колебании ледникового массива, когда колебание спровоцировано падением гармонической сейсмической волны на поверхность откоса примерзания массива. Координатная ось  $ox$  направлена вдоль толщины массива, а сейсмическая волна распространяется вдоль откоса.

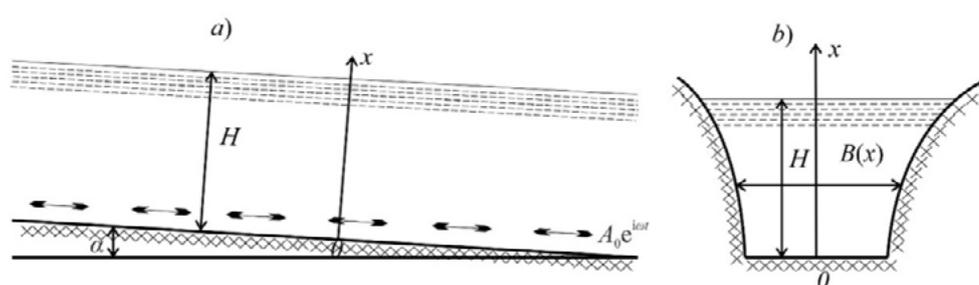


Рис. 1. Схематический чертёж и расчетная схема задачи сейсмических колебаний ледникового массива. а) продольный разрез массива б) поперечное сечение массива и ущелья /

Fig. 1. Schematic drawing and calculation scheme of the problem of the glacial massif seismic vibrations. a) the longitudinal section of the massif b) the cross section of the massif and the gorge

В пределах гипотезы Е. С. Сорокина, искомая функция  $U(x, t)$  помимо дифференциального уравнения, которое в развернутом виде [Музаев и др., 2014; Скучик, 1971; Шумский, 1955] можно представить как:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2(1 + i\eta) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{B'(x)}{B(x)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = g \sin \alpha, \quad (4)$$

должна удовлетворять следующим граничным и начальным условиям [Ворович и др., 1999; Шумский, 1955]:

$$U(x, t)|_{x=0} = A_0 e^{i\omega t}, \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0, \quad (5)$$

$$U(x, t)|_{t=0} = U_0(x), \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad A_0 = \frac{k_s g}{\omega^2}, \quad (6)$$

где  $k_s$  – сейсмический коэффициент местности,  $\omega = 2\pi\nu$  – круговая частота колебания сейсмической волны, падающей на подстилающую поверхность примерзания ледникового массива к откосу,  $\nu$  – частота в герцах,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $U_0(x)$  – начальные сдвиговые перемещения в массиве обусловленные составляющей силы тяжести, направленной вдоль откоса,  $a$  – скорость распространения поперечной сдвиговой волны в среде.

### Методы работы

Дифференциальное уравнение (4), граничные условия (5) и начальные условия (6) в совокупности представляют начально-краевую задачу математической физики и моделируют сдвиговые сейсмические колебания ледникового массива.

При известной функции  $U(x, t)$  касательные сейсмонапряжения в теле массива определяются в результате дифференцирования этой функции по пространственной координате  $x$ , умножения на модуль сдвига  $G(1 + i\eta)$ , а затем выделения из полученного выражения действительной части [Прочность. Устойчивость. Колебания, 1968; Скучик, 1971].

$$\tau(x, t) = \operatorname{Re} G(1 + i\eta) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \quad (7)$$

Физико-механические характеристики материала массива  $\rho$ ,  $G$  и  $a$ , а также характеристики падающей сейсмической волны  $k_s$  и  $\omega$  считаются заданными постоянными величинами.

Один коэффициент дифференциального уравнения (4)  $1 + i\eta$  является комплексной величиной. Другой коэффициент  $\frac{B'(x)}{B(x)}$  в общем случае зависит от координаты  $x$ . В связи с этим решение поставленной начально-краевой задачи аналитическими методами математической физики связано с большими математическими трудностями и для произвольной функции  $B(x)$  задача никем не решена.

Путь решения вышеставленной начально-краевой задачи (4) – (7) существенно упрощается, если переменную ширину массива (т. е. переменную ширину горного ущелья ледника) аппроксимировать экспоненциальной функцией вида:

$$B(x) = B_0 e^{Sx}, \quad S = \frac{1}{H} \ln \frac{B(H)}{B(0)}. \quad (8)$$

Формпараметр  $S$  – характеризует криволинейную трапецидальную конфигурацию поперечного сечения ледникового массива, где  $B_0 = B(0)$  и  $B(H)$  – ширины поперечного сечения соответственно на поверхности примерзания и на свободной поверхности ледникового массива (рис. 1).

При таком вполне приемлемом упрощающем предположении переменный коэффициент дифференциального уравнения (4) становится постоянной величиной, а само уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2(1 + i\eta) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + S \frac{\partial U}{\partial x} \right) = g \sin \alpha, \quad (9)$$

Граничные и начальные условия (5) и (6) не изменяются.

Приступив к решению поставленной начально-краевой задачи целесообразно в начале применить следующую подстановку [Кошляков и др., 1970; Bonnet, Heize, 1995]:

$$U(x, t) = e^{-\frac{S}{2}x} (V(x, t) + U_0(x)) + A_0 e^{i\omega t}, \quad A_0 = \frac{k_s g}{\omega^2}, \quad (10)$$

где  $A_0 = \frac{k_s g}{\omega^2}$ , при  $t > 0$ .

Дифференциальное уравнение (4), граничные условия (5) и начальные условия (6) относительно нововведенной искомой функции  $V(x, t)$  приводятся к следующим видам:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2(1 + i\eta) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{S^2}{4} V \right) = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} e^{\frac{S}{2}x}, \quad (11)$$

$$V(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} - \frac{S}{2} V(x, t) \right) \Big|_{x=H} = 0, \quad (12)$$

$$V(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что стационарное перемещение  $U_0(x)$  обусловлено составляющей силы тяжести вдоль склона. В связи с этим имеют место следующие равенства:

$$\frac{d^2 U_0}{dx^2} + \frac{S}{2} U_0 = g \sin \alpha e^{\frac{S}{2}x}, \quad U_0|_{x=0} = 0; \quad U_0'|_{x=H} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим следующую последовательность тригонометрических функций [Кошляков и др., 1970; Bonnet, Heize, 1995]:

$$\sin \mu_1 \frac{x}{H}, \quad \sin \mu_2 \frac{x}{H}, \dots, \sin \mu_n \frac{x}{H}, \dots \quad (15)$$

где упорядоченная последовательность действительных чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  представляет положительные корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\mu \cos \mu - \frac{SH}{2} \sin \mu = 0. \quad (16)$$

Непосредственной проверкой можно доказать, что последовательность функций (15) является ортогональной системой тригонометрических функций на интервале  $(0; H)$ , где  $H$  – толщина (мощность) ледникового массива, а  $S$  – формпараметр поперечного сечения ледникового массива [Прочность. Устойчивость. Колебания, 1968; Bonnet, Heize, 1995].

В связи с вышеизложенным, решение дифференциального уравнения (11) удовлетворяющего граничным условиям (12) можно искать в виде следующего тригонометрического ряда по ортогональной системе функций (15):

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin \mu_n \frac{x}{H}, \dots \quad (17)$$

Непосредственной проверкой можно доказать, что выражение (17) удовлетворяет граничным условиям (14) при условии, что числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  являются положительными корнями трансцендентного уравнения (16).

С целью определения неизвестных функций  $V_n(t)$ ,  $n=1,2,3,\dots$  подставим ряд (17) в дифференциальное уравнение (11), предварительно разложив функцию  $e^{\frac{s}{2}x}$  в ряд Фурье по синусам по ортогональной системе функций (15). Затем приравняем коэффициенты при одинаковых синусах в правой и левой частях. В результате всего этого относительно искомой функции  $V_n(t)$ ,  $n=1,2,3,\dots$  получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} + a^2(1 + i\eta) \left( \frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{S^2}{4} \right) V_n = A_0 \omega^2 \gamma_n e^{i\omega t} \quad (18)$$

с двумя начальными условиями:

$$V_n(t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{dV_n(x,t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

где  $\gamma_n$  – коэффициенты Фурье в разложении функции  $e^{\frac{s}{2}x}$  в ряд Фурье [Кошляков и др., 1970; Bonnet, Heize, 1995].

$$\gamma_n = \frac{\int_0^H e^{\frac{s}{2}x} \sin \mu_n \frac{x}{H} dx}{\int_0^H \sin^2 \mu_n \frac{x}{H} dx} \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Решение дифференциального уравнения (18) с комплексным коэффициентом целесообразно искать в виде следующей комплексной функции:

$$V_n(t) = Y_{1,n}(t) + iY_{2,n}(t). \quad (21)$$

Тогда задача Коши (18) (19) для дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом приводится к решению следующей системы двух дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_{1,n}}{dt^2} + a^2 r_n^2 Y_{1,n} - a^2 r_n^2 \eta Y_{2,n} &= A_0 \omega^2 \gamma_n \cos \omega t, \\ \frac{d^2 Y_{2,n}}{dt^2} + a^2 r_n^2 Y_{2,n} + a^2 r_n^2 \eta Y_{1,n} &= A_0 \omega^2 \gamma_n \sin \omega t, \end{aligned} \quad (22)$$

и со следующими начальными условиями:

$$Y_{1,n}(t) \Big|_{t=0} = \frac{dY_{1,n}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (23)$$

$$Y_{2,n}(t) \Big|_{t=0} = \frac{dY_{2,n}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \quad (24)$$

где  $r_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{S^2}{4}}$ ,  $n=1,2$ .

Путем исключения система дифференциальных уравнений (22) приводится к следующим двум дифференциальным уравнениям четвертого порядка:

$$\frac{d^4 Y_{1,n}}{dt^4} + 2a^2 r_n^2 \frac{d^2 Y_{1,n}}{dt^2} + a^4 r_n^4 (1 + \eta^2) Y_{1,n} = M_1 \cos \omega t + M_2 \sin \omega t, \quad (25)$$

$$\frac{d^4 Y_{2,n}}{dt^4} + 2a^2 r_n^2 \frac{d^2 Y_{2,n}}{dt^2} + a^4 r_n^4 (1 + \eta^2) Y_{2,n} = -M_2 \cos \omega t + M_1 \sin \omega t, \quad (26)$$

$$M_1 = A_0 \omega^2 \gamma_n (a^2 r_n^2 - \omega^2), \quad M_2 = A_0 \omega^2 \gamma_n a^2 r_n^2 \eta \quad (27)$$

с начальными условиями (23) – (24) соответственно.

Решения дифференциальных уравнений (25) и (26) ограниченные на бесконечности при  $t \rightarrow \infty$  и удовлетворяющие нулевым начальным условиям (23) имеют следующие виды:

$$\begin{aligned} Y_{1,n}(t) &= M_1(\cos \omega t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t) + M_2 \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) - \frac{\alpha_n}{\beta_n} M_1 e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t, \\ Y_{2,n}(t) &= -M_2 \left( \cos \omega t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t - \frac{\alpha_n}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) + M_1 \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t \right) \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\alpha_n = ar_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}}$ ,  $\beta_n = ar_n \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}}$ ,  $\gamma_n = \frac{4\mu_n \int_0^H e^{\frac{S}{2}x} \sin \mu_n \frac{x}{H} dx}{(2\mu_n - \sin 2\mu_n)H}$ .

Обратным ходом, следуя по выражениям (17), (11), (10) и (8) для вычисления сдвиговых сеймонапряжений на поверхности примерзания ледникового массива получается следующая совокупность расчетных формул:

$$\tau(0, t) = \frac{2A_0G}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a^2 r_n^2 \omega^2 (1+\eta^2) - \omega^4}{\Delta} \Psi_{1,n}(t) + \frac{\eta \omega^4}{\Delta} \Psi_{2,n}(t) \right], \quad (29)$$

где

$$r_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{S^2}{4}},$$

$$\Psi_{1,n}(t) = \cos \omega t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t - \frac{\alpha_n}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t,$$

$$\Psi_{2,n}(t) = \sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_n} e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t,$$

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2}}{2} ar_n \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}-1}, \beta_n = \frac{\sqrt{2}}{2} ar_n \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1},$$

$$\gamma_n = \frac{4\mu_n^2}{(2\mu_n - \sin 2\mu_n) \left( \mu_n^2 + \left( \frac{SH}{2} \right)^2 \right)}$$

$$\Delta = (a^2 r_n^2 - \omega^2)^2 + (a^2 r_n^2 \eta)^2,$$

$\mu_n, n = 1, 2, \dots$  – положительные корни следующего характеристического трансцендентного уравнения  $\mu \cos \mu - \frac{SH}{2} \sin \mu = 0$ ,  $\eta$  – коэффициент потерь в ледниковом массиве согласно с гипотезой Е. С. Сорокина.

При нулевом значении формпараметра  $S=0$  совокупность расчетных формул (29) упрощается и приводится к виду:

$$\tau(0, t) = \frac{2A_0G}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a^2 a_n^2 \omega^2 (1+\eta^2) - \omega^4}{\Delta} \Psi_{1,n}(t) + \frac{\eta \omega^4}{\Delta} \Psi_{2,n}(t) \right] \quad (30)$$

где  $a_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H}$ ,  $\alpha_n = \frac{\sqrt{2}}{2} aa_n \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}-1}$ ,  $\beta_n = \frac{\sqrt{2}}{2} aa_n \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}$ ,

$$\Delta = (a^2 a_n^2 - \omega^2)^2 + (a^2 a_n^2 \eta)^2.$$

### Результаты работы

На примере сошедшего 20.09.2002 г. ледника Колка [Бергер, 2018; Заалишвили, Харебов, 2014; Котляков и др., 2014] проведены вычислительные эксперименты на компьютере по совокупности полученных расчётных формул (30). Входным пара-

метрам присваивались следующие числовые значения [Музаев и др., 2014; Музаев, Созанов, 2019]: толщина (мощность) ледникового массива  $H=108\text{ м}$ ; модуль сдвига льда  $G=0,38 \cdot 10^{10}\text{ Па}$ . Круговой частоте, падающей на массив сейсмической волны, придавали следующие околорезонансные значения  $\omega=1,05\omega_r$ ;  $1,03\omega_r$ ;  $1,01\omega_r$ ;  $0,95\omega_r$ ;  $0,97\omega_r$ ;  $0,99\omega_r$ , где  $\omega_r = aa_1 = \frac{a\pi}{2H}$  – представляет круговую частоту первой основной формы собственных колебаний массива. Коэффициенту потерь придавался следующий ряд значений  $\eta = 0$ ;  $0,00032$ ;  $0,0032$ ;  $0,032$ ;  $0,32$ . На рисунках 2-4 представлены графики зависимости  $\tau_1(t)$  и  $\tau_2(t)$  от времени  $t$ , где:

$$\tau_1(t) = 2A_0 \frac{G}{H} \frac{a^2 a_1^2 \omega^2 (1 + \eta^2) - \omega^4}{(a^2 a_1^2 - \omega^2)^2 + (a^2 a_1^2 \eta)^2} \Psi_{1,1}(t) + \frac{\eta \omega^4}{(a^2 a_1^2 - \omega^2)^2 + (a^2 a_1^2 \eta)^2} \Psi_{2,1}(t),$$

$$\Psi_{1,1}(t) = \cos \omega t - e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t - \frac{\alpha_1}{\beta_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t,$$

$$\Psi_{2,1}(t) = \sin \omega t - \frac{\omega}{\beta_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t,$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a a_1 \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} - 1}, \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a a_1 \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} + 1},$$

$$a_1 = \frac{\pi}{2H}$$

$$\tau_2(t) = 2A_0 \frac{G}{H} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{\omega^2 a^2 a_n^2 (1 + \eta^2) - \omega^4}{\Delta} \Psi_{1,n}(t) + \frac{\eta \omega^4}{\Delta} \Psi_{2,n}(t) \right].$$

Величина  $\tau_1(t)$  является первым резонансным членом ряда (29). Величина  $\tau_2(t)$  представляет собой сумму остальных членов ряда (29), начиная со второго члена.

На рисунке 2 представлен график зависимости сейсмонапряжений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  от времени при следующих параметрах: коэффициент потерь  $\eta=0,00032$ ; круговая частота сейсмической волны  $\omega=0,99\omega_r$ , или численно  $\omega=29,34\text{ с}^{-1}$ .

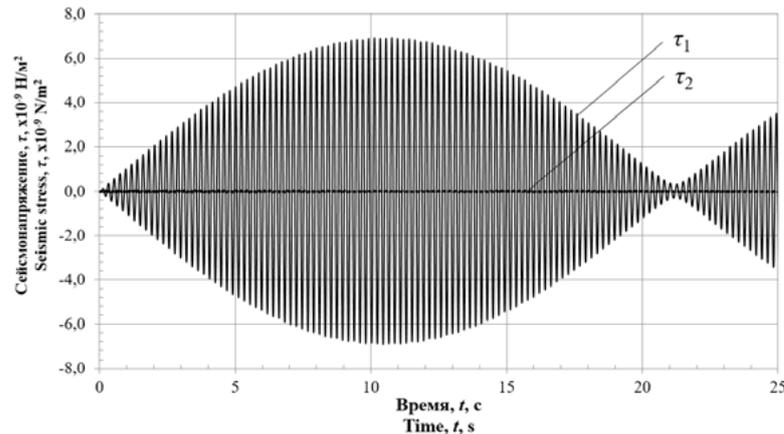


Рис. 2. Графики зависимости сейсмонапряжений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  от времени /  
Fig. 2. Graphs of the dependence of seismic stresses  $\tau_1$  and  $\tau_2$  on time

Из рисунка 2 следует, что при данных входных параметрах абсолютная максимальная величина сейсмонапряженности составляет  $6,92 \cdot 10^9\text{ н/м}^2$ , а максимальное абсолютное отношение  $\tau_2/\tau_1=0,085$ .

Если для большей наглядности построить огибающую графика колебаний сейсмонапряженности, то видно, что при приближении круговой частоты сейсмической волны  $\omega$  к круговой частоте первой основной формы собственных колебаний массива сейсмонапряженность растет (рис. 3).

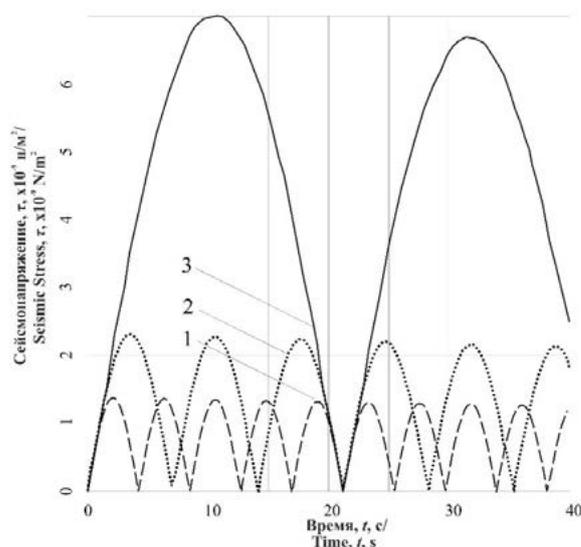


Рис. 3. Графики зависимости сейсмонапряжения от времени при трех значениях околорезонансной круговой частоты. Коэффициент потерь  $\eta=0,0$ ; круговая частота сейсмической волны  $\omega$ : 1- $0,95 \omega_r=28,156 \text{ с}^{-1}$ ; 2- $0,97 \omega_r=28,75 \text{ с}^{-1}$ ; 3- $0,99 \omega_r=29,34 \text{ с}^{-1}$  /

Fig. 3. Graphs of the dependence of the seismic voltage on time at three values of the near-resonant circular frequency. The loss coefficient  $\eta=0,0$ ; the circular frequency of the seismic wave  $\omega$ : 1- $0.95 \omega_r=28.156 \text{ s}^{-1}$ ; 2- $0.97 \omega_r=28.75 \text{ s}^{-1}$ ; 3- $0.99 \omega_r=29.34 \text{ s}^{-1}$

После обработки и анализа результатов вычислительных экспериментов установлены следующие закономерности при сейсмических колебаниях ледникового массива (рис. 4).

Согласно графику, представленному на рисунке 2, при  $\omega=0,95\omega_r$  и  $\eta=0$  ( $\eta=0,32 \cdot 10^{-3}$ ) для максимального значения сейсмического напряжения на подстилающей поверхности примерзания массива получено числовое значение:

$$\tau = 1,3A_0 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad (31)$$

где  $A_0$  – амплитуда колебания (смещение).

В соответствии с [Аптикаев, 2020; Заалишвили, 2009; Курбацкий, Косауров, 2016; Huang Juun-Yan et al., 2020; Yin-Min Wu et al., 2003] характеристики колебаний при землетрясениях различной интенсивности имеют следующие числовые значения (табл. 1).

При 5-ти балльном землетрясении амплитуда колебания на откосе  $A_0 = 10^{-3}$  м и согласно (31)  $\tau = 1,3 \cdot 10^6$  Па, а при температурах от  $-4^\circ\text{C}$  до  $-1^\circ\text{C}$  разрушающее напряжение для льда составляет  $5,5 \cdot 10^5$  Па. И так как в этом случае сейсмонапряжение превышает разрушающее напряжение в 2,5 раза ледяной поток может полностью отколоться от подстилающей поверхности, что ведет к образованию гляциального селевого потока.

## Выводы

1. Составлена механико-математическая модель о поперечных сдвиговых колебаниях ледникового массива, сцепленного с подстилающим склоном поверхностью примерзания массива, когда колебание обусловлено падением на массив гармонической сейсмической волны. Модель представляет собой начально-краевую задачу математической физики, в которой один из коэффициентов является комплексной

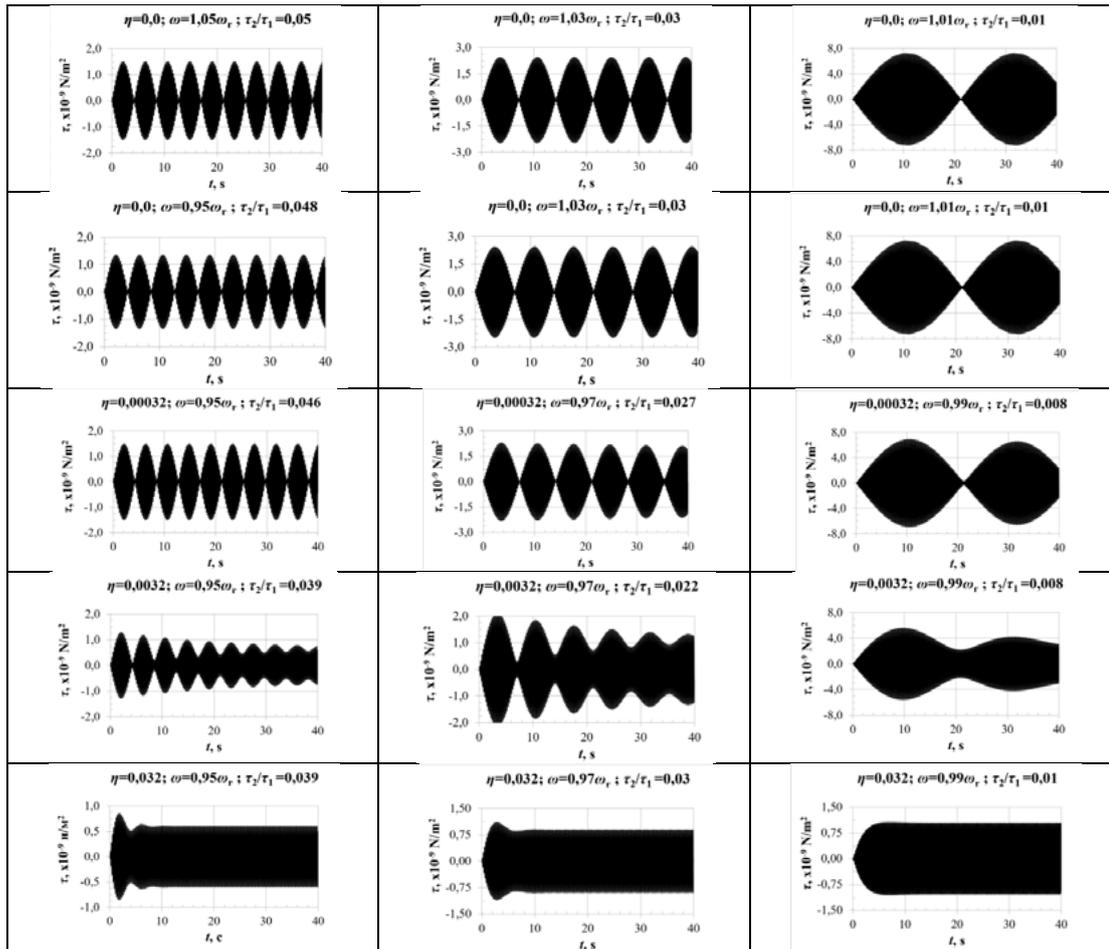


Рис. 4. Графики зависимости сеймонапряжения от времени на поверхности примерзания при различных значениях коэффициента потерь  $\eta$ , и различных значениях околорезонансной круговой частоты  $\omega/\omega_r$

Fig. 4. Graphs of the dependence of the seismic voltage on the time on the freezing surface at different values of the loss coefficient  $\eta$ , and different values of the near-resonant circular frequency  $\omega/\omega_r$

Таблица 1 / Table 1

**Числовые характеристики при землетрясениях различной интенсивности / Numerical characteristics for earthquakes of different intensity**

Интенсивность, балл MSK / Intensity, MSK	Ускорение, $10^{-2} \text{ м/с}^2$ / Acceleration, $10^{-2} \text{ м/с}^2$	Скорость, $10^{-2} \text{ м/с}$ / Velocity, $10^{-2} \text{ м/с}$	Смещение, $10^{-3} \text{ м}$ / Displacement, $10^{-3} \text{ м}$	Сейсмический коэффициент $K_c$ / Seismic Coefficient $C_s$
5	12-25	1-2	0,5-1,0	0,008
6	20-50	2,1-4,0	1,1-2,0	0,016
7	50-100	4,1-8,0	2,1-4	0,025
8	100-200	8,1-16,0	4,1-8,0	0,05
9	200-400 400-800	16,1-32,0 32,1-64,0	8,1-16,0 16,1-32,0	0,1

величиной (комплексный модуль сдвига, согласно гипотезе Е. С. Сорокина), а другой коэффициент зависит от пространственной координаты. Оба эти фактора создают трудности при аналитическом решении поставленной начально-краевой задачи.

2. В одном частном виде переменного коэффициента найден путь аналитического решения задачи с вышеприведёнными особенностями. Получена совокупность расчётных формул для вычисления сейсмонапряжений, которые провоцирует падающая на массив сейсмическая волна. Доказано утверждение о том, что низкочастотная сейсмическая волна может сорвать ледниковый массив с поверхности примерзания, в результате чего может образоваться гляциальный селевой поток.

### Литература

1. Аптикаев Ф. Ф. Новые строительные нормы: шаг вперед, два шага назад. // Геология и Геофизика Юга России. – 2020. – Т. 10. №2. – С. 71-81. DOI: 10.46698/VNC.2020.50.57.005
2. Бергер М. Г. О противоречивости и необоснованности гляциологических представлений о катастрофической пульсации ледника Колка, её причинах и аналогах. // Геология и Геофизика Юга России. – 2018. – Т. 8. №2. – С. 83-90. DOI 10.23671/VNC.2018.2.14358
3. Войтковский К. Ф. Механические свойства льда. – М.: АН СССР, 1960. – 142 с.
4. Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Динамика массовых тел и резонансные явления в деформируемых средах. – М.: Научный мир, 1999. – 242 с.
5. Заалишвили В. Б. Сейсмическое микрорайонирование территорий городов, населенных пунктов и больших строительных площадок. – М.: Наука, 2009. – 350 с.
6. Заалишвили В. Б., Харебов К. С. Процесс схода ледника Колка 20 сентября 2002 г (по инструментальным данным). // Ледник Колка: вчера, сегодня, завтра. – Владикавказ: ЦГИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014. – С. 141-173.
7. Завриев К. С., Назаров А. Г., Карцивадзе Г. Н. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. – М.: Издательство литературы по строительству, 1970. – 224 с.
8. Котляков В. М., Рототаева О. В., Носенко Г. А., Десинов Л. В., Осокин Н. И., Чернов Р. А. Кармадонская катастрофа: что случилось и чего ждать дальше. – М.: Издательский дом «Кодекс», 2014. – 184 с.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 767 с.
10. Курбацкий Е. М., Косауров А. П. К вопросу о пересчете балльности в ускорения колебаний грунта. // Инженерные изыскания. – 2016. – № 14. – С. 50-60.
11. Музаев И. Д., Созанов В. Г. К проблеме возникновения гляциальных селей. // В сб.: Опасные природные и техногенные процессы в горных регионах: модели, системы, технологии. Коллективная монография. / Под ред. А. В. Николаева, В. Б. Заалишвили. – Владикавказ: ГФИ ВНИЦ РАН, 2019. – 806 с.
12. Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Постановка и решение многослойной краевой задачи сейсмических колебаний высотного сооружения. // Сейсмостойкое строительство Безопасность сооружений. – 2014. – № 1. – С. 22-25.
13. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трёх томах. Том 3. / Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Поновко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
14. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. Перевод с английского. – М.: МИР, 1971. – 274 с.

15. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 37 с.
16. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Госстройиздат, 1956. – 336 с.
17. Шульман С. Г. Расчёты сейсмостойкости гидросооружений с учётом влияния водной среды – М.: Энергия, 1976. – 336 с.
18. Шумский П. А. Основы структурного ледоведения. – М. – 1955. – 492 с.
19. Bonnet G., Heize J. E. Non linear seismic response of a soft layer. // 10<sup>th</sup> European conference on Earthquake Engineering. Duma (et). Blkema, Rotterdam. – 1995. – pp. 361-364.
20. Ewing M., Crary A. P and Thorne A. M. Propagation of elastic waves in ice. *Physics*, v. 5, N 6, 1934, pp. 165-168
21. Glen J. W., Perutz M. F. The growth and deformation of ice crystals. // *J. Glaciology*. – 1954. – Vol. 2. No. 16. – pp. 397-403
22. Huang Jun-Yan, Zaalishvili V. B., Melkov D. A., Chun-Hsiang Kuo, Kuo-Liang Wen, Chun-Te Chen. Progress of Soil Nonlinearity Researches of Recent Years in Russia and Taiwan. // *Geology and Geophysics of Russian South*. – 2020. – Vol. 10 (2). – pp. 95-112. DOI: 10.46698/VNC.2020.28.93.007.
23. Jellinek H., Brill R. Viscoelastic properties of ice. // *J. appl. Physics*. – 1956. – Vol. 27. No. 10. – pp. 1198-1209.
24. Yin-Min Wu, Ta Liang Teng, Tzay-Chyn Shin, Nai-Chi Hsiao. Relationship between PGA, Ground PGV and I (MM) in Taiwan. // *BSSA*. – 2003. – Vol. 93 (1). – pp. 386-396.

### References

1. Aptikaev F. F. New building codes: one step forward, two steps backward. *Geology and Geophysics of Russian South*, 2020. Vol. 10. No. 2. pp. 71-81. DOI: 10.46698/VNC.2020.50.57.005. (In Russ.)
2. Berger M. G. On the inconsistency and groundlessness glaciological ideas about the catastrophic surge of Kolka glacier, its causes and analogues. *Geology and Geophysics of Russian South*, 2018. Vol. 8. No. 2. pp. 83-90. DOI 10.23671/VNC.2018.2.14358 (In Russ.)
3. Voitkovskii K. F. Mechanical properties of ice. Moscow. ASUSSR, 1960. 142 p. (In Russ.)
4. Vorovich I. I., Babeshko V. A., Pryakhina O. D. Dynamics of mass bodies and resonance phenomena in deformable media. Moscow. Nauchnyi mir, 1999. 242 p. (In Russ.)
5. Zaalishvili V. B. Seismic microzonation of urban territories, settlements and large construction sites. Moscow. Nauka, 2009. 350 p. (In Russ.)
6. Zaalishvili V. B., Kharebov K. S. The process of the Kolka glacier collapse on September 20, 2002 (according to instrumental data). In: *Kolka Glacier: yesterday, today, tomorrow*. Vladikavkaz. CGI VSC RAS, 2014. pp. 141-173. (In Russ.)
7. Zavriev K. S., Nazarov A. G., Kartsivadze G. N. Foundations of the theory of seismic resistance of buildings and structures. Moscow. Publishing house of literature on construction, 1970. 224 p. (In Russ.)
8. Kotlyakov V. M., Rototaeva O. V., Nosenko G. A., Desinov L. V., Osokin N. I., Chernov R. A. Karmadon catastrophe: what happened and what to expect next. Moscow. Kodeks, 2014. 184 p. (In Russ.)

9. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. Moscow. Vysshaya shkola, 1970. 767 p. (In Russ.)
10. Kurbatskii E.M., Kosaurov A.P. On the question of recalculation of the intensity points in the acceleration of ground vibrations. Engineering survey, 2016. No. 14. pp. 50-60. (In Russ.)
11. Muzaev I.D., Sozanov V.G. On the problem of glacial mudflows. In: Proceedings Hazardous natural and man-made processes in mountainous regions: models, systems, technologies. Vladikavkaz. GPI VSC RAS, 2019. 806 p. (In Russ.)
12. Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Formulation and solution of a multilayer boundary value problem of seismic vibrations of a high-rise structure. Earthquake engineering. Constructions safety, 2014. No. 1. pp. 22-25. (In Russ.)
13. Durability. Stability. Vibrations. Handbook in three volumes. Volume 3. Ed. I. A. Birger and Ya. G. Ponovko. Moscow. Mechanical Engineering, 1968. 567 p. (In Russ.)
14. Skuchik E. Simple and complex vibratory systems. Translation from English. Moscow. MIR, 1971. 274 p. (In Russ.)
15. Slepyan L.I. Nonstationary elastic waves. Leningrad. Sudostroenie, 1972. 37 p. (In Russ.)
16. Sorokin E.S. Dynamic analysis of load-bearing structures of buildings. Moscow. Gosstroyizdat, 1956. 336 p. (In Russ.)
17. Shulman S.G. Calculations of seismic resistance of hydraulic structures taking into account the influence of the aquatic environment. Moscow. Energy, 1976. 336 p. (In Russ.)
18. Shumskii P.A. Fundamentals of Structural Ice Science. Moscow, 1955. 492 p. (In Russ.)
19. Bonnet G., Heize J.E. Non linear seismic response of a soft layer. 10<sup>th</sup> European conference on Earthquake Engineering. Duma (et). Blkema, Rotterdam, 1995. pp. 361-364.
20. Ewing M., Crary A. P and Thorne A.M. Propagation of elastic waves in ice. Physics, 1934. Vol. 5. No. 6. pp. 165-168
21. Glen J.W., Perutz M.F. The growth and deformation of ice crystals. J. Glaciology, 1954. Vol. 2. No. 16. pp. 397-403
22. Huang Jyun-Yan, Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Chun-Hsiang Kuo, Kuo-Liang Wen, Chun-Te Chen. Progress of Soil Nonlinearity Researches of Recent Years in Russia and Taiwan. Geology and Geophysics of Russian South, 2020. Vol. 10 (2). pp. 95-112. DOI: 10.46698/VNC.2020.28.93.007.
23. Jellinek H., Brill R. Viscoelastic properties of ice. J. appl. Physics, 1956. Vol. 27. No. 10. pp. 1198-1209.
24. Yin-Min Wu, Ta Liang Teng, Tzay-Chyn Shin, Nai-Chi Hsiao. Relationship between PGA, Ground PGV and I (MM) in Taiwan. BSSA, 2003. Vol. 93 (1). pp. 386-396.