

УДК 550.34.01:539.3

DOI: [10.46698/VNC.2020.32.87.010](https://doi.org/10.46698/VNC.2020.32.87.010)

Оригинальная статья

Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений (переходной процесс) при воздействии (вертикальное сосредоточенное в виде треугольного импульса) на поверхность полуплоскости (задача Лэмба)

В. К. Мусаев 

Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва,
Ярославское шоссе, д. 26;

Российский университет транспорта, Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9;

Мингячевирский государственный университет, Республика Азербайджан,
AZ4500, Мингячевир, ул. Диляра Алиева, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Статья поступила: 15.10.2020, после рецензирования: 06.11.2020, принята к публикации: 23.11.2020

Резюме: Актуальность работы. Рассматривается задача о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости при воздействии вертикальной сосредоточенной нагрузки в виде треугольного импульса. Полученные результаты исследуемой задачи являются актуальными, так как позволяют выявить типы волн на поверхности упругой полуплоскости, которые применяются в сейсмологии и сейсмостойкости геообъектов. **Цель работы.** Для оценки несущей способности геообъектов нужна информация о напряженном состоянии. Поэтому получение информации об амплитудах и формах продольных, поперечных и релеевских волн в задаче Лэмба в виде контурных напряжений является актуальной фундаментальной научной задачей. **Методика.** Для решения нестационарной динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями используется метод конечных элементов в перемещениях. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Предложен квазирегулярный подход к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области. Методика основывается на схемах: точка, линия и плоскость. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные и прямоугольные конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90 наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн. **Результаты.** Приводится некоторая информация о численном моделировании упругих волн напряжений в упругой полуплоскости при сосредоточенном волновом воздействии в виде треугольного импульса (дельта-функции). Исследуемая расчетная область имеет 12008001 узловых точек. Решается система уравнений из 48032004 неизвестных. Показано изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости в разных точках. Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса на поверхности упругой полуплоскости. После поверхностных волн Релея наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн.

Ключевые слова: нестационарный процесс, комплекс программ, волновая механика, вычислительная механика, треугольный импульс, задача Лэмба, волна Релея, стоячая волна.

Для цитирования: Мусаев В.К. Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений (переходной процесс) при воздействии (вертикальное сосредоточенное в виде треугольного импульса) на поверхность полуплоскости (задача Лэмба). *Геология и геофизика Юга России*. 2020. 10 (4): 164 – 174. DOI: 10.46698/VNC.2020.32.87.010.

GEOTECHNOLOGY. GEOMECHANICS

DOI: [10.46698/VNC.2020.32.87.010](https://doi.org/10.46698/VNC.2020.32.87.010)

Original paper

Mathematical modeling of non-stationary
elastic stress waves (transient process) under load
(vertical concentrated as a triangular pulse)
applied at surface of a half-plane (Lamb's problem)

V. K. Musayev 

Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway,
Moscow 129337, Russian Federation;

Russian University of Transport, 9 Obraztsova Str., bldg. 9,
Moscow 127994, Russian Federation;

Mingachevir State University, Dilyara Alieva Str., Mingachevir AZ4500,
Republic of Azerbaijan, e-mail: musayev-vk@yandex. ru

Received: 15.10.2020, revised: 06.11.2020, accepted: 23.11.2020

Abstract: Relevance. The problem of numerical modeling of longitudinal, transverse and surface waves on the free surface of an elastic half-plane under the influence of a vertical concentrated load in the form of a triangular pulse is considered. The obtained results of the problem under study are relevant, since they allow us to identify the types of waves on the surface of an elastic half-plane that are used in seismology and seismic stability of geo objects. **The aim.** To assess the load-bearing capacity of geo objects, you need information about the stress state. Therefore, obtaining information about the amplitudes and shapes of longitudinal, transverse, and Rayleigh waves in the lamb problem in the form of contour stresses is an urgent fundamental scientific task. **Method.** To solve a non-stationary dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions, the finite element method in displacements is used. Using the finite element method in displacements, the linear problem with initial and boundary conditions was led to the linear Cauchy problem. A quasi-regular approach to solving a system of second-order linear ordinary differential equations in displacements with initial conditions and to approximating the domain under study is proposed. The method is based on the following diagrams: point, line, and plane. The study area is divided by spatial variables into triangular and rectangular finite elements of the first order. According to the time variable, the study area is divided into linear finite elements with two nodal points. The Fortran-90 algorithmic language was used in the development of the software package. **Results.** Some information is provided on numerical modeling of elastic stress waves in an elastic half-plane under concentrated wave action in the form of a triangular pulse (Delta-function). The estimated area under study has 12008001 nodal points. A system of equations consisting of 48032004 unknowns is solved. The change in the elastic contour stress on the free surface of the half-plane at different points is shown. The amplitude of surface Rayleigh waves is significantly greater than the amplitudes of longitudinal, transverse, and other waves when a

concentrated vertical action is performed in the form of a triangular pulse on the surface of an elastic half-plane. After surface Rayleigh waves, a dynamic process is observed in the form of standing waves.

Keywords: non-stationary process, software package, wave mechanics, computational mechanics, triangular momentum, lamb problem, Rayleigh wave, standing wave.

For citation: Musayev V. K. Mathematical modeling of non-stationary elastic stress waves (transient process) under load (vertical concentrated as a triangular pulse) applied at the surface of a half-plane (Lamb's problem). *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Russian South*. (in Russ.). 2020. 10 (4): 164 – 174. DOI: 10.46698/VNC.2020.32.87.010.

Введение

Рассматривается задача о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости при воздействии в виде дельта функции (задача Лэмба).

Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Постановка нестационарных динамических задач механики деформируемого твердого тела приведена в следующих работах [Акатьев и др., 2016, 2019; Джинчвелашвили и др., 2017; Дейвис, 1961; Зенкевич, 1975; Зенкевич и др., 1986; Кольский, 1955; Куранцов и др., 2017; Мусаев, 2017; Мухелишвили, 1966; Новацкий, 1975; Поттер, 1975; Саликов и др., 2016; Стародубцев и др., 2016, 2017а-в; Musayev, 1991, 2015, 2019].

Применение рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ в задачах переходного процесса механики деформируемых тел приведена в работах [Акатьев и др., 2016, 2019; Джинчвелашвили и др., 2017; Куранцов и др., 2017; Мусаев, 2017; Саликов и др., 2016; Стародубцев и др., 2016, 2017а-в; Musayev, 1991, 2015, 2019].

Оценка достоверности и точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [Акатьев и др., 2016; Джинчвелашвили и др., 2017; Куранцов и др., 2017; Мусаев, 2017; Саликов и др., 2016; Стародубцев и др., 2016, 2017а-в; Musayev, 1991, 2015].

Цель

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где: σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u_x и u_y – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) – используем метод конечных элементов в перемещениях.

Методика

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Γ , записываем приближенное уравнение движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где: \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \vec{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \quad \dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\vec{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где: Δt – шаг по временной координате.

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (5)$$

где: Δl – длина стороны конечного элемента; r – число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных волновых воздействиях.

При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

Результаты

Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта-функции (рис. 2) перпендикулярной свободной поверхности упругой полуплоскости (рис. 1).

Расчеты проводились в следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

В точке B перпендикулярно свободной поверхности ABC приложено упругое нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \leq n \leq 11$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $11 \leq n \leq 21$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$ (-1 кгс/см^2)).

Начальные условия для контура $CDEA$ при $t > 0$ $u_x = u_y = \dot{u}_x = \dot{u}_y = 0$. Отраженные волны от контура $CDEA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 500$.

Граница ABC свободна от нагрузок, кроме точки B , где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y .

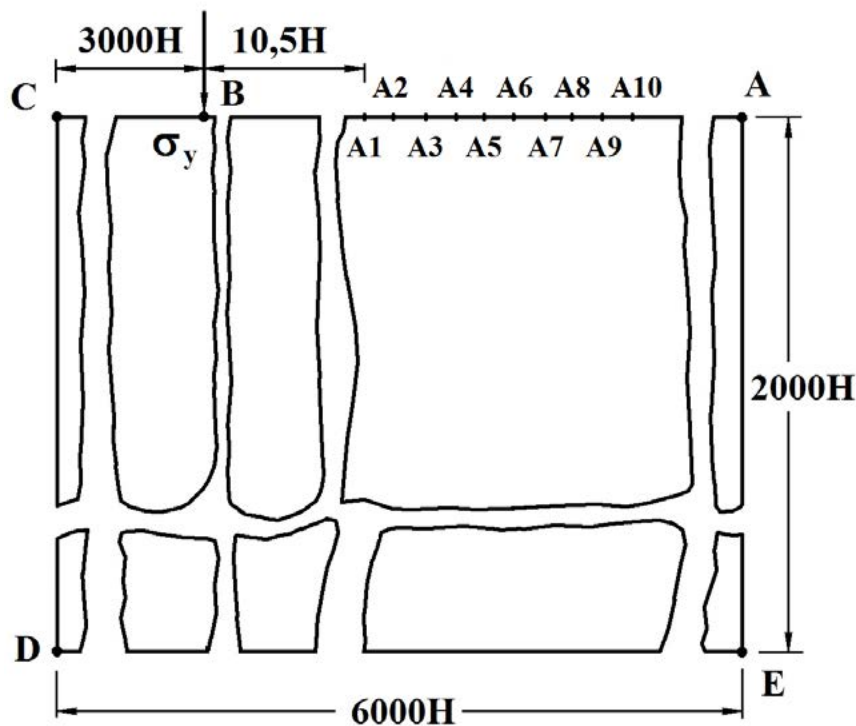


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта-функции на свободной поверхности упругой полуплоскости. /

Fig. 1. Statement of the problem of the concentrated wave impact in the form of a delta function on the free surface of an elastic half-plane.

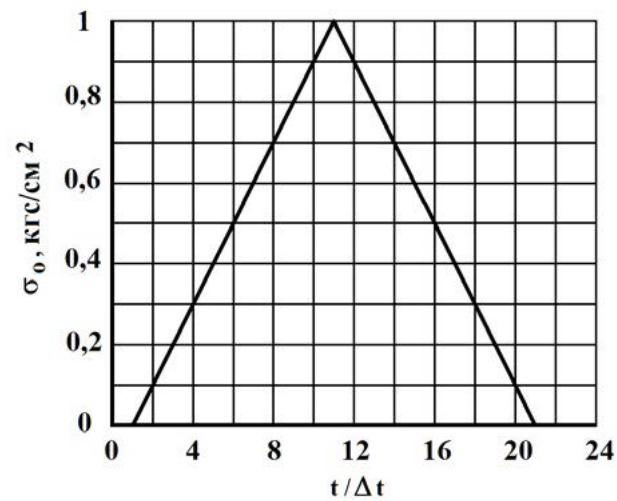


Рис. 2. Воздействие в виде дельта-функции. /
Fig. 2. Impact in the form of a delta function.

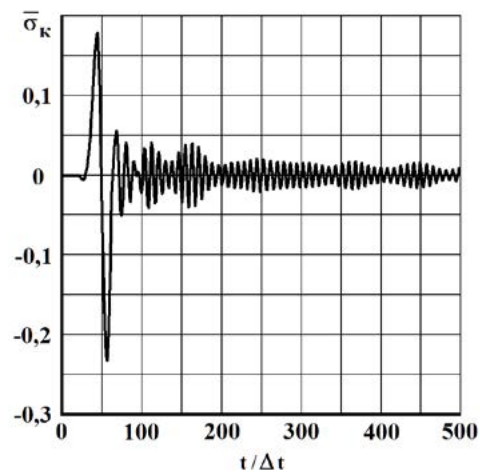


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A1. /
Fig. 3. Change in elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at a point A1.

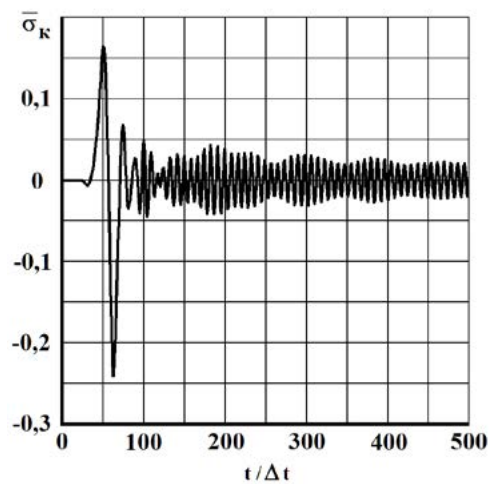


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A3. /
Fig. 4. Change in elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at a point A3.

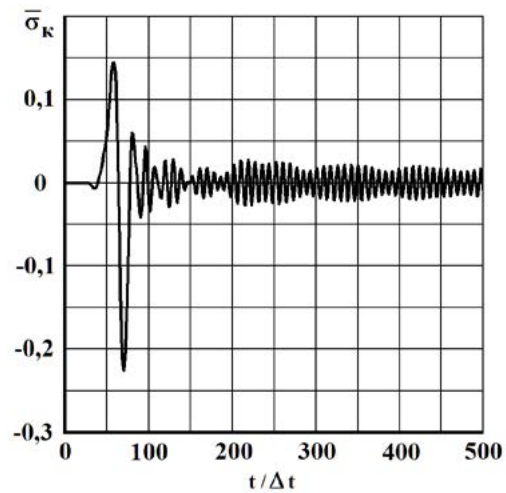


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A5. /
Fig. 5. Change in elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at a point A5.

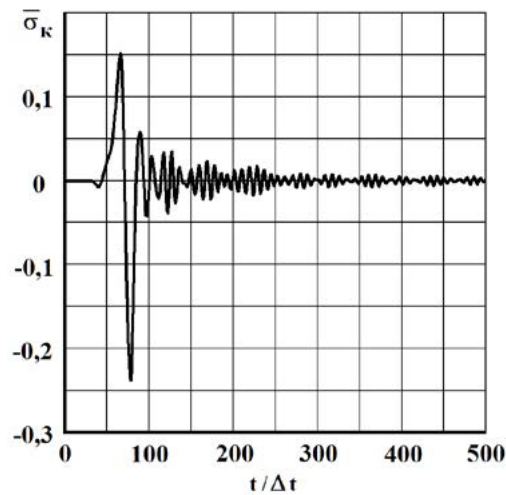


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A7. /
Fig. 6. Change in elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at a point A7.

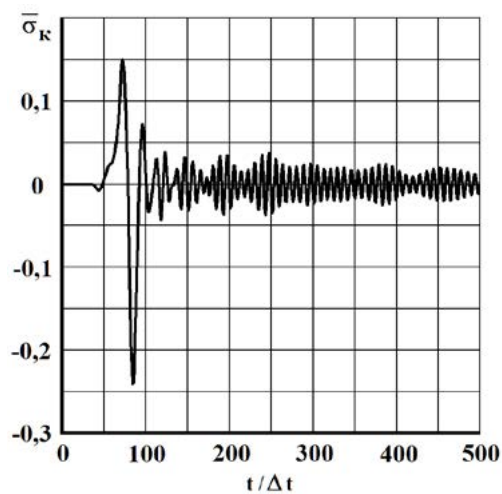


Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A9. /
Fig. 7. Change in elastic contour stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at a point A9.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \times 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \times 10^4$ МПа ($3,15 \times 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \times 10^4$ кг/м³ ($0,255 \times 10^{-5}$ кгс см²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с.

Исследуемая расчетная область имеет 12008001 узловых точек. Решается система уравнений из 48032004 неизвестных.

На рисунках 3-7 показано изменение упругого контурного напряжения ($\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0$)) во времени n в точках $A1, A3, A5, A7$ и $A9$ (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками: $A1$ и $A2$ равно H ; $A2$ и $A3$ равно H ; $A3$ и $A4$ равно H ; $A4$ и $A5$ равно H ; $A5$ и $A6$ равно H ; $A6$ и $A7$ равно H ; $A7$ и $A8$ равно H ; $A8$ и $A9$ равно H ; $A9$ и $A10$ равно H).

Заключение

1. На основе метода конечных элементов разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях на сложные объекты. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

2. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач при волновых воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

3. Решена задача о математическом моделировании нестационарных упругих волн напряжений при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде дельта-функции на поверхность полуплоскости. Решается система уравнений из 48032004 неизвестных. Растягивающее упругое контурное напряжение $\bar{\sigma}_k$ имеет следующее максимальное значение $\bar{\sigma}_k = 0,18$. Сжимающее упругое контурное напряжение $\bar{\sigma}_k$ имеет следующее максимальное значение $\bar{\sigma}_k = -0,24$.

4. Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса на поверхность упругой полуплоскости.

5. На поверхности упругой полуплоскости распространяются волны с разной скоростью, поэтому на определенных расстояниях они могут быть явно выделены.

6. После прохождения поверхностных волн Релея наблюдается динамический процесс в виде стоячих волн.

Литература

1. Акатьев С. В., Суцев Т. С., Куранцов В. В., Мусаев А. В., Дикова Е. В. Оценка точности моделирования плоских волн (прямоугольный импульс) в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение: ТЗ8. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XVIII. В 2 т. Том 2. – Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2016. – С. 22-31.

2. Акатьев С. В., Куранцов В. В., Куранцов В. А., Мусаев А. В., Дикова Е. В. Применение численного метода и комплекса программ Мусаева В. К. для моделирования несущей способности технических систем с помощью волновой теории взрывной безопасности. //

Высшая школа. Новые технологии науки, техники, педагогики: материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2019». – М.: Московский политех, 2019. – С. 161-167.

3. Джинчвелашвили Г. А., Попадейкин В. В., Аксенов В. А., Блинные В. В., Доронин Ф. Л. О физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIX. В 2 т. Том 2. – Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2017. – С. 55-63.

4. Дэйвис Р. Волны напряжений в твердых телах. – М.: Иностранная литература, 1961. – 104 с.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 320 с.

7. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – М.: Иностранная литература, 1955. – 192 с.

8. Куранцов В. А., Стародубцев В. В., Мусаев А. В., Самойлов С. Н., Кузнецов М. Е. Моделирование импульса (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; вторая ветвь: треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В. К. // Проблемы безопасности российского общества. – 2017. – № 2. – С. 51-55.

9. Мусаев В. К. Применение волновой теории сейсмического воздействия для моделирования упругих напряжений в Курпсайской плотине с грунтовым основанием при незаполненном водохранилище. // Геология и геофизика Юга России. – 2017. – № 2. – С. 98-105.

10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

11. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

12. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975. – 392 с.

13. Саликов Л. М., Мусаев А. В., Идельсон Е. В., Самойлов С. Н., Блинные В. В. Оценка физической достоверности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений в виде импульсного воздействия (функция Хевисайда) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016. – С. 356-359.

14. Стародубцев В. В., Мусаев А. В., Куранцов В. А., Мусаева С. В., Кулагина Н. В. Оценка точности и достоверности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений (треугольный импульс) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXIV Международной конференции. – М.: РГГУ, 2016. – С. 352-355.

15. Стародубцев В. В., Акатьев С. В., Мусаев А. В., Шиянов С. М., Куранцов О. В. Моделирование с помощью численного метода Мусаева В. К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде. // Проблемы безопасности российского общества. – 2017а. – № 1. – С. 63-68.

16. Стародубцев В. В., Мусаев А. В., Дикова Е. В., Крылов А. И. Моделирование достоверности и точности импульсного воздействия в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2017а. – С. 339-341.

17. Стародубцев В. В., Акатьев С. В., Дикова Е. В., Мусаев А. В., Крылов А. И. Моделирование импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К. // Новые технологии науки, техники, педагогики высшей школы: материалы Международной научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2017». – М.: Московский политех, 2017б. – С. 82-87.

18. Musayev V. K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects. // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Sent-Louis: University of Missouri-Rolla. – 1991. – Vol. 3. – pp. 87-97.

19. Musayev V. K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Vol. 11. Is. 1. – pp. 135-146.

20. Musayev V. K. Mathematical modeling of seismic nonstationary elastic waves stresses in Kurpsai dam with a base (half-plane). // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol. 12. Is. 3. – pp. 73-83.

References

1. Akat'ev S. V., Sushchev T. S., Kurantsov V. V., Musaev A. V., Dikova E. V. Estimation of the accuracy of modeling plane waves (rectangular impulse) in an elastic half-plane using a numerical method, algorithm and software package of Musaev V. K. In: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference. Issue XVIII. In 2 volumes. Volume 2. Rostov-on-Don. Don State Technical University, 2016. pp. 22-31. (In Russ.)

2. Akat'ev S. V., Kurantsov V. V., Kurantsov V. A., Musaev A. V., Dikova E. V. Application of the numerical method and software package of Musaev V. K. for modeling the bearing capacity of technical systems using the wave theory of explosive safety. In: Proceedings of the All-Russian scientific and practical conference "Science – Society – Technologies – 2019". Moscow. Moscow Polytech, 2019. pp. 161-167. (In Russ.)

3. Dzhinchvelashvili G. A., Popadeikin V. V., Aksenov V. A., Blinnikov V. V., Doronin F. L. On the physical reliability and mathematical accuracy of modeling non-stationary stress waves in deformable bodies using the numerical method, algorithm and software package of Musaev V. K. In: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference. Issue XIX. In 2 volumes. Volume 2. Rostov-on-Don. Don State Technical University, 2017. pp. 55-63. (In Russ.)

4. Davis R. Stress waves in solids. Moscow. Foreign Literature, 1961. 104 p. (In Russ.)

5. Zenkevich O. The finite element method in technology. Moscow. Mir, 1975. 543 p. (In Russ.)

6. Zenkevich O., Morgan K. Finite elements and approximation. Moscow. Mir, 1986. 320 p. (In Russ.)

7. Kol'skii G. Stress waves in solids. Moscow. Foreign literature, 1955. 192 p. (In Russ.)

8. Kurantsov V. A., Starodubtsev V. V., Musaev A. V., Samoilov S. N., Kuznetsov M. E. Modeling an impulse (the first branch: the ascending part is a quarter of a circle, the descending part is linear; the second branch: a triangle) in the elastic half-plane using the numerical method of Musaev V. K. Problems of the security of Russian society. 2017. No. 2. pp. 51-55. (In Russ.)

9. Musaev V. K. Application of the wave theory of seismic impact for modeling elastic stresses in the Kurpsay dam with a soil base for an unfilled reservoir. Geology and Geophysics of Russian South. 2017. No. 2. pp. 98-105. (In Russ.)

10. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow. Nauka, 1966. 708 p. (In Russ.)

11. Novatskii V. Theory of elasticity. Moscow. Mir, 1975. 872 p. (In Russ.)

12. Potter D. Computational methods in physics. Moscow. Mir, 1975. 392 p. (In Russ.)

13. Salikov L. M., Musaev A. V., Idel'son E. V., Samoilo V. N., Blinnikov V. V. Assessment of the physical reliability of modeling plane non-stationary elastic stress waves in the form of an impulse action (Heaviside function) in a half-plane using a numerical method, an algorithm and a complex of programs by Musaev V. K. In: Proceedings of the XXIV International Conference. Problems of security management of complex systems. Moscow. RGGU, 2016. pp. 356-359. (In Russ.)
14. Starodubtsev V. V., Musaev A. V., Kurantsov V. A., Musaeva S. V., Kulagina N. V. Estimation of the accuracy and reliability of modeling plane non-stationary elastic stress waves (triangular pulse) in a half-plane using a numerical method, an algorithm and a complex of programs by Musaev V. K. In: Proceedings of the XXIV International Conference. Problems of security management of complex systems. Moscow. RGGU, 2016. pp. 352-355. (In Russ.)
15. Starodubtsev V. V., Akat'ev S. V., Musaev A. V., Shiyarov S. M., Kurantsov O. V. Modeling using the numerical method of Musaev V. K. non-stationary elastic waves in the form of impulse action (the ascending part is a quarter of a circle, the middle part is horizontal, the descending part is linear) in a continuous deformable medium. Problems of the security of Russian society. 2017a. No. 1. pp. 63-68. (In Russ.)
16. Starodubtsev V. V., Musaev A. V., Dikova E. V., Krylov A. I. Modeling the reliability and accuracy of impulse action in an elastic half-plane using a numerical method, algorithm and software package of Musaev V. K. In: Proceedings of the All-Russian conference with international participation. Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems. Moscow. RUDN, 2017a. pp. 339-341. (In Russ.)
17. Starodubtsev V. V., Akat'ev S. V., Dikova E. V., Musaev A. V., Krylov A. I. Modeling an impulse impact (ascending part – a quarter of a circle, descending part – a quarter of a circle) in a half-plane using a numerical method, an algorithm and a complex of programs of Musaev V. K. In: Proceedings of the International scientific and practical conference “Science – Society – Technologies – 2017”. New technologies of science, technology, pedagogy of higher education. Moscow. Moscow Polytech, 2017b. pp. 82-87. (In Russ.)
18. Musayev V. K. Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects. Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. St. Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. Vol. 3. pp. 87-97.
19. Musayev V. K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015. Vol. 11. Is. 1. pp. 135-146.
20. Musayev V. K. Mathematical modeling of seismic nonstationary elastic waves stresses in Kurpsai dam with a base (half-plane). International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016. Vol. 12. Is. 3. pp. 73-83.