

УДК 550.34

## ОБРАТНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ ОБРАЩЕНИЕ РАЗРЫВНОГО ГОДОГРАФА РЕФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНЫ

© 2013 В. Ю. Бурмин, д.ф.-м.н.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Россия, 123995,  
г. Москва, ул. Б. Грузинская, 10,  
e-mail: burmin@ifz.ru.

Одним из способов определения скоростей распространения сейсмических волн в Земле в настоящее время является обращение сейсмических годографов. Эта задача распадается на две задачи: первая – это вывод формул обращения годографов и вторая – сглаживание наблюдаемых сейсмических годографов такими функциями, которые удовлетворяли бы условию разрешимости задачи. Оказывается, что такими функциями являются выпуклые кубические сплайны. Здесь рассматривается только одна задача – обращение разрывного годографа рефрагированной волны.

**Ключевые слова:** сейсмические волны, годографы, сплайны

Из многочисленных геофизических методов, сейсмические методы исследования Земли, основанные на изучении распространения сейсмических волн в упругой среде, дают наиболее полные и детальные данные о структуре геологических сред. Основными способами определения скоростей распространения сейсмических волн в Земле в настоящее время являются решения, основанные на анализе времен пробега сейсмических волн и, в частности, обращении сейсмических годографов.

Несмотря на то, что в настоящее время бурно развиваются методы численного решения обратных многомерных кинематических задач сейсмологии или, как принято говорить, методы сейсмической томографии, определение скоростей распространения сейсмических волн в предположении об изменении скоростей только с глубиной остаётся весьма актуальным. Прежде всего, это связано с тем, что задачи сейсмической томографии предполагают задание некоторого начального приближения скоростной модели среды. При этом, чем ближе начальное приближение к истинной модели среды, тем лучше сходимость решения в задаче томографии к окончательной модели. Кроме этого, восстановление скоростных характеристик методом сейсмической томографии основывается, как правило, на использовании только рефрагированных волн и не дает возможность определять границы раздела в упругой среде. В то же время, обращение годографов отраженных и обменных волн позволяет определять положение резких границ в среде, распределение скорости в классе монотонных скоростных функций. Более того, если имеем некоторую площадную систему сейсмических наблюдений, то, получая положение границы обмена под каждой станцией, можно по набору сейсмических событий на различных эпицентральных расстояниях построить трехмерное распределение соответствующей сейсмической границы и скоростей продольных и поперечных волн.

Определение скоростей сейсмических волн в Земле основано главным образом на анализе времен пробега сейсмических волн и, в частности, обращении сейсмических годографов. Годографы представляют собой зависимость времен распро-

странения упругих колебаний от эпицентральных расстояний (горизонтальный годограф) или от разности глубин источников и приемников (вертикальный годограф). Поскольку скорости распространения сейсмических волн в упругой среде определяют времена пробега колебаний от источников до приемников, то задачу нахождения скоростных характеристик среды можно рассматривать как задачу обращения совокупности сейсмических годографов, пренебрегая малыми изменениями амплитуды и формы колебаний в сейсмической волне.

Впервые строгое рассмотрение задачи обращения сейсмического годографа от поверхностного источника было проведено в начале нашего века Г. Герглотцем [Herglotz, 1907], Е. Вихертом [Wiechert, 1907] и Г. Бейтманом [Bateman, 1910] для сферически симметричной Земли. Ими было показано, что если  $u(r) = r/v(r) > 0$  является монотонной возрастающей функцией, где  $v(r)$  скорость распространения сейсмической волны на расстоянии  $r$  от центра Земли, то  $v(r)$  однозначно определяется по годографу  $t(y)$  сейсмической волны, наблюдаемому на поверхности Земли. Для определения функции  $v(r)$  была получена формула обращения сейсмического годографа, которая имеет вид

$$\ln \frac{R_3}{r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_1} \text{Arch} \left[ \frac{\alpha(\psi)}{\beta(\psi_1)} \right] d\psi,$$

где  $R_3$  – радиус Земли;  $y_1$  – угловое расстояние от источника упругих колебаний до точки их приема, соответствующее лучу с параметром  $\beta = \left. \frac{dt}{d\psi} \right|_{\psi=\psi_1}$ ;  $a(y)$  – текущее значение лучевого параметра ( $\psi_1 \geq \psi \geq 0$ ).

Первоначально формула обращения использовалась для определения скорости распространения сейсмических волн в Земле от землетрясений. Однако в начале тридцатых годов метод, предложенный Г. Герглотцем и Е. Вихертом, стал применяться в сейсморазведке в предположении, что скорость распространения сейсмических волн в упругой среде меняется только с глубиной. К этому периоду относятся работы [Slichter, 1932] и [Чибисов, 1934].

Л. Сликтер [Slichter, 1932] рассмотрел случай, когда годограф сейсмической волны имеет разрывы, связанные с наличием в упругой среде слоя пониженной скорости (волновод). Он показал, что слои в волноводе можно переставлять (времена прихода сейсмических волн, регистрируемых на поверхности Земли, при этом не меняются) и нашел верхнюю границу мощности волновода.

С. В. Чибисовым [1934] была получена формула обращения годографа рефрагированной волны, распространяющейся в среде с плоскопараллельным распределением скорости со скачками на границах слоев.

Тем не менее из-за вычислительных трудностей этот метод не нашел широкого применения до появления быстродействующих электронных вычислительных машин в начале 60-х годов, когда начался новый этап развития методов решения обратной одномерной кинематической задачи сейсмологии.

Большое внимание решению обратных кинематических задач уделено в работе [Гервер, Маркушевич, 1967], где была установлена эквивалентность одномерной задачи для круга и горизонтально однородного полупространства и даны формулы конформного преобразования круга в полуплоскость  $(x, y)$ :

$$x = R_3 \psi, \quad z = R_3 \ln \frac{R_3}{r}, \quad v(z) = R_3 \frac{v(r)}{r}$$

Получена формула, связывающая глубину максимального проникновения сейсмического луча с функцией  $x(a)$  для упругой среды с волноводами в предположении, что скорость в волноводах задана:

$$z(\beta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\beta}^{\beta_0} \frac{x(\alpha) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \sum_{i=1}^k \int_{z_i}^{\bar{z}_i} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v^2(z) - \alpha_i^2}{\alpha_i^2 - \beta_i}} dz \right\},$$

где  $z(\beta)$  – глубина максимального проникновения луча с параметром  $\beta$ ;  $\beta_0 = v^{-1}(0)$ ;  $\bar{z}_i$  и  $z_i$  – глубины верхней и нижней границ  $i$ -го волновода;  $v(z)$  – скорость в  $i$ -м волноводе;  $\alpha_i = v^{-1}(z_i - 0)$ . Ими было показано, что, если в среде имеются слои пониженной скорости, то скорость распространения сейсмических волн в волноводе и ниже определяется неоднозначно.

В.С. Гейко [1982] исследовал вопрос неединственности решения обратной кинематической задачи сейсмологии, основываясь на аналитическом продолжении сейсмического годографа. Им было показано, что для достаточно широкого класса скоростных функций множество решений задачи является «слихтеровым», т.е. скоростная функция вне волнопроводов определяется однозначно, а в волноводах – с точностью до перестановки элементарных слоев в волноводе. При этом однозначно определяются минимальное значение скорости в волноводе и мощность волновода.

Рефрагированные (преломленные) волны, как правило, уверенно прослеживаются только в первых вступлениях, и годографам первых вступлений волн соответствует, как правило, незначительное их проникновение вглубь слоев, особенно при малых градиентах скорости в слоях. Более полную информацию о распределении скоростей сейсмических волн можно получить, если привлечь к интерпретации годографа отраженных волн. Поскольку в формулы обращения годографов входит параметр луча, который численно равен производной годографа, то одним из важных вопросов в задаче обращения сейсмических годографов является дифференцирование сейсмического годографа, заданного с погрешностями дискретным набором точек. Для вертикально неоднородной среды годограф может быть представлен как совокупность конечного числа простых кривых, которые на участках монотонности обращены выпуклостью вверх или вниз, в то же время экспериментальные годографы в силу случайных погрешностей и неоднородности реальных упругих сред в горизонтальных направлениях практически никогда не удовлетворяют этим условиям.

Таким образом, задача обращения годографов сейсмических волн распадается на две задачи. Первая задача – это вывод формул обращения годографов и вторая – сглаживание наблюдаемых сейсмических годографов такими функциями, которые удовлетворяли бы условию разрешимости задачи. Оказывается, что такими функциями являются выпуклые кубические сплайны.

Здесь рассматривается только одна задача – обращение разрывного годографа рефрагированной волны. Другие обратные задачи сейсмологии рассмотрены в монографии автора [Бурмин, 2012; Burmin, 2013].

### Обращение разрывных годографов рефрагированных волн

Запишем параметрическое уравнение годографа рефрагированной волны, распространяющейся в вертикально-неоднородной среде:

$$x(p) = 2p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{v^{-2}(z) - p^2}}, \quad t(p) = 2 \int_0^{z^*} \frac{dz}{v^2(z) \sqrt{v^{-2}(z) - p^2}},$$

где  $v(z)$  – скорость распространения сейсмической волны;  $p$  – параметр луча численно равный производной годографа в соответствующей точке.

Пусть годограф имеет разрыв, связанный с наличием в среде слоя с пониженной скоростью (волновода). Рассмотрим задачу определения скоростной функции  $v=v(z)$  на интервале  $[0, z_M]$  по годографу рефрагированной волны. Будем искать решение задачи на множестве  $V$  положительных, дважды кусочно-гладких, ограниченных скоростных функций  $v(z) \in V$ , определенных на сегменте  $[0, z_M]$ ,  $z_M \leq H < \infty$ . Будем полагать, что число разрывов годографа конечно. Пусть первая ветвь годографа начинается в точке  $(0,0)$  (что, вообще говоря, не обязательно). Тогда по формулам обращения годографа Герглотца-Вихерта-Чибисова по первой ветви годографа можно восстановить скоростную кривую до некоторой глубины  $z^*$ . Пересчитаем оставшиеся ветви годографа на уровень  $z^*$ . Будем иметь

$$x(p, z^*) = x(p) - 2p \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} = 2p \left\{ \int_{z^*}^{\bar{z}^*} + \int_{\bar{z}^*}^{z(p)} \right\} \frac{dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}},$$

$$t(p, z^*) = t(p) - 2 \int_0^{z^*} \frac{u^2(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} = 2 \left\{ \int_{z^*}^{\bar{z}^*} + \int_{\bar{z}^*}^{z(p)} \right\} \frac{u^2(z) dz}{\sqrt{u^2(z) - p^2}}.$$

Здесь  $u(z) = v^{-1}(z)$ .

Рассмотрим вторую ветвь годографа. Кривая  $t(x)$  (после пересчета) будет иметь вид, показанный, например, на рис. 1.

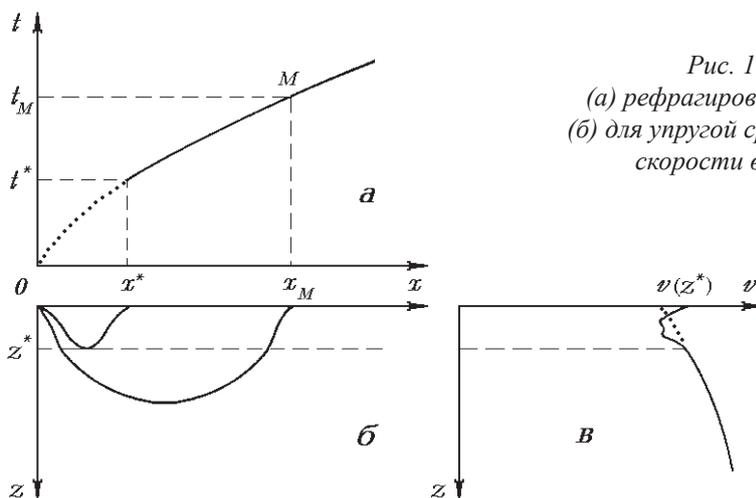


Рис. 1. Фрагмент годографа (а) рефрагированных волн и сейсмические лучи (б) для упругой среды с произвольным изменением скорости в верхней части разреза (в).

Как известно, в волноводе существует бесконечное множество скоростных функций, которые удовлетворяют наблюдаемому годографу. Рассмотрим в волноводе функцию  $H(u) = \text{mes} \{z : z \in [z^*, \bar{z}^*], v^{-1}(z) \leq u\}$ . По определению функция  $H(u)$ : а) не убывает; б) равна нулю при  $-\infty < u \leq \bar{u}^*$ ; в) равна  $h = \bar{z}^* - z^*$  при  $u^* \leq u < \infty$ . Здесь  $\bar{u}^*$  – минимальное значение показателя преломления в волноводе;  $u^*$  – максимальное значение показателя преломления в волноводе.

Так как вне волновода функция  $u = u(z)$  строго убывающая, то, следовательно, существует обратная функция  $z = z(u)$ .

В этом случае уравнения годографа могут быть записаны в виде суммы интегралов Римана и Стильтьеса [Бурмин, 2012]

$$x(p, z^*) = 2p \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \quad t(p, z^*) = 2 \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) u^2 du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\}, \quad (1)$$

где  $\lambda(u) = -dz/du \geq 0$ ,  $dH(u) \geq 0$ .

Умножим правую и левую часть первого уравнения из (1) на  $1/\sqrt{w^2 - p^2}$  и проинтегрируем в пределах от  $q$  до  $q_0$ . Тогда будем иметь

$$\int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp,$$

где  $q \leq p \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*$ .

Меняя местами внутренние и внешний интегралы, в соответствии с правилом Дирихле (область интегрирования показана на рис. 2), получим:

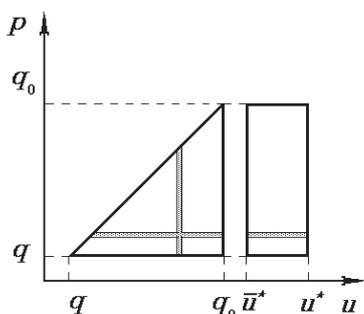


Рис. 2. Область интегрирования в задаче обращения разрывного годографа рефрагированных волн

$$\begin{aligned} \int_q^{q_0} \frac{x(p, z^*) dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} &= \int_q^{q_0} \frac{2p}{\sqrt{w^2 - p^2}} \left\{ \int_p^{q_0} \frac{\lambda(u) du}{\sqrt{u^2 - p^2}} + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} \frac{dH(u)}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right\} dp = \int_q^{q_0} \lambda(u) \int_q^u \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} du + \\ &+ \int_{\bar{u}^*}^{u^*} dH(u) \int_q^{q_0} \frac{2p dp}{\sqrt{(u^2 - p^2)(w^2 - p^2)}} = \int_q^{q_0} \lambda(u) K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} K_2(u, w) dH(u), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K_1(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - u^2}}$ ,  $q \leq u \leq q_0 \leq \bar{u}^* \leq w \leq u^*$ ;

$$K_2(u, w) = 2 \ln \frac{\sqrt{w^2 - q^2} + \sqrt{u^2 - q^2}}{\sqrt{w^2 - q_0^2} + \sqrt{u^2 - q_0^2}}, \quad q \leq q_0 \leq u^* \leq u, w \leq u^*.$$

Умножим правую и левую часть второго уравнения из (1) на  $p/\sqrt{w^2 - p^2}$  и также проинтегрируем в пределах от  $q$  до  $q_0$ . В результате будем иметь

$$\int_q^{q_0} \frac{t(p, z^*) p dp}{\sqrt{w^2 - p^2}} = \int_q^{q_0} \lambda(u) u^2 K_1(u, w) du + \int_{\bar{u}^*}^{u^*} u^2 K_2(u, w) dH(u). \quad (3)$$

Таким образом, мы получили систему из двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно двух функций  $\lambda(u)$  и  $H(u)$ , которые должны удовлетворять условиям

$$\lambda(u) \geq 0, \quad dH(u) \geq 0. \quad (4)$$

Для решения уравнений (2) и (3) сегмент  $[q, q_0]$  разбивается  $N+1$  точками на  $N$  частичных сегментов. На каждом частичном сегменте функция  $\lambda(u)$  считается равной положительной константе  $\lambda_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Сегмент  $[\bar{u}^*, u^*]$  также разбивается  $N+1$  точками на  $N$  частичных сегментов. На сегменте  $[\bar{u}^*, u^*]$  рассматривается функция скачков  $\Delta H_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Тогда уравнения (2) и (3) запишутся в виде системы из  $2N$  уравнений, линейных относительно  $2N-2$  неизвестных  $\lambda_j$  и  $\Delta H_j$  и нелинейных относительно двух неизвестных  $w_1 = u^*$  и  $w_N = \bar{u}^*$ . Численное решение этой задачи рассмотрено в работе [Бурмин, 2012].

### **Сглаживание наблюдаемых годографов сейсмических волн, распространяющихся в вертикально-неоднородных средах, выпуклыми кубическими сплайнами**

Использование формул обращения сейсмического годографа предполагает, что лучевой параметр  $p$ , равный производной годографа, задан для каждого значения  $x \in [0, x_M]$ . Поскольку предполагается, что из наблюдений известны только величины  $x$  и  $t$ , то возникает задача дифференцирования экспериментального годографа, заданного с погрешностями дискретным набором точек. Как известно, эта задача в общем случае также является некорректной.

Чтобы получить решение задачи с помощью формул обращения сейсмического годографа, необходимо предварительно сгладить экспериментальный годограф некоторой функцией  $T(x)$ , которая удовлетворяла бы определенным требованиям, предъявляемым к годографам, и имела бы минимальное отклонение от экспериментального годографа в заданной метрике  $\rho = (f, \tilde{f})$ . Дифференцируя найденную сглаживающую функцию, найдем значения параметров  $p$ .

Необходимо иметь в виду, что экспериментальный годограф задан дискретным набором точек, определенным сеткой наблюдений  $D: a = x_0, \dots, x_n = b$ . В то же время, для того, чтобы воспользоваться формулами обращения, необходимо, чтобы функция  $t(x)$  была задана на всем интервале  $[a, b]$ . Следовательно, необходимо восполнить экспериментальный годограф на интервалах  $[x_j, x_{j+1}]$ . Очевидно, что сглаживающая функция должна выполнить и эту задачу.

На участках монотонности и непрерывности функция  $t(x)$  должна удовлетворять требованиям, выполнение которых является необходимым условием для того, чтобы  $t(x)$  являлась годографом рефрагированной или отраженной волны. Перечислим эти требования:

- 1) Функция  $t(x)$  – неотрицательная функция,  $t(x) \geq 0$  ( $x \in [0, x_M]$ ).
- 2) Производная функции  $t(x)$  – неотрицательная функция,  $t'(x) \geq 0$ .
- 3) Если на сегменте  $[x_j, x_{j+1}]$  функция  $t(x)$  соответствует прямой ветви годографа, то вторая производная  $t''(x)$  – неположительная функция,  $t''(x) \leq 0$ . Если на сегменте  $[x_j, x_{j+1}]$  функция  $t(x)$  соответствует обратной ветви годографа, то вторая производная  $t''(x)$  – положительная функция,  $t''(x) > 0$ . В случае годографов отраженных волн и волн, распространяющихся вверх от источника, вторая производная функции  $t(x)$  должна быть неотрицательной функцией,  $t'' \geq 0$  [Бурмин, 1980].

Очевидно, что первое требование выполняется всегда. Второе требование выполняется почти всегда, за исключением тех возможных случаев, когда ошибки в определении точек годографа недопустимо велики. Третье же требование не выпол-

няется практически никогда. Последнее обстоятельство связано с тем, что даже небольшие ошибки в определении времен и расстояний приводят к нарушению условий  $t''(x) \leq 0$  ( $t''(x) > 0$ ) для рефрагированных волн или  $t''(x) \geq 0$  для отраженных волн. Кроме этого, неоднородность реальной упругой среды по латерали также приводит к нарушению третьего требования.

Условия  $t''(x) \leq 0$  ( $t''(x) \geq 0$ ) и  $t''(x) > 0$ , которым должны удовлетворять годографы рефрагированных (отраженных) волн, означают, что  $t(x)$  – выпуклые вверх или вниз функции и, следовательно, аппроксимирующие функции  $T(x)$  должны учитывать характер и степень гладкости  $t(x)$  на достаточно большой области определения  $t(x)$ .

Наиболее подходящими функциями, аппроксимирующими экспериментальный годограф, являются выпуклые кубические сплайны, так как они обладают четко выраженными локальными свойствами – существенное влияние на поведение функции  $T(x)$  оказывают лишь те  $t_i$ , которые заданы в точках, близких к  $x_i$ . Сплайны более низкого порядка не обеспечивают достаточной точности, а сплайны более высокого порядка не обеспечивают выпуклости [Бурмин, 1980].

Наша задача будет решена, если удастся построить такой сплайн, который доставлял бы минимум функционалу

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} T_j'' - \tilde{t}_i \right\}^2 \quad (5)$$

при условии выпуклости сплайна

$$T_j'' \leq 0 \quad (T_j'' > 0), \quad (6)$$

где  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, определяющей выпуклый кубический сплайн [Бурмин, 1980].

Примечательно, что обе задачи, рассмотренные выше, редуцируются к задачам квадратичного программирования. Известно, что задача квадратичного программирования всегда имеет единственное решение, так как, например, выпуклый по  $T$  функционал  $S$  ограничен снизу и непрерывен на выпуклом множестве  $T = \{T^2 \mid T^2 \in 0 \text{ (} T^2 \in 0)\}$ .

## Литература

1. Бурмин В. Ю. Аппроксимация сейсмического годографа выпуклыми сплайнами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. №2. С. 90-96.
2. Бурмин В. Ю. Обратные кинематические задачи сейсмологии. Новые подходы и результаты – Saarbrücken, Germany: Palmarium Academic Publishing., 2012. 146 с.
3. Гейко В. С. Теория обращения годографа преломленной волны. 1 // Геофиз. журн. 1982. Т.4. №2. С. 3-17.
4. Гервер М. Л., Маркушевич В. М. Определение по годографу скорости распространения сейсмических волн // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С. 3-51. (Выч. сейсм. Вып.3).
5. Чибисов С. В. Обработка криволинейного годографа упругих волн при плоскопараллельном распределении их скоростей в упругой среде // Журн. геофизики. 1934. Т.4, вып.2. С. 211-225.

6. Bateman H. The solution of the integral equation which connects the velocity of propagation an earthquake wave in the interior of the Earth with the time which the disturbance takes to travel to different stations on the Earth's surface // *Phil. Mag.* 1910. Vol. 6, N.19. P. 576.

7. Burmin V. Inverse kinematic problems of seismology. New approaches and results – Germany. Lap Lambert Academic Publishing. 2013. 134 p.

8. Slichter L.B. The theory of the interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures // *J. Appl. Physics.* 1932. Vol. 3, N.6. P. 273-295.

9. Herglotz G. Uber das benndorfsche problem der fortpflanzungsgeschwindigkeit der erdbeenstrahlen // *Phys. Zeitschr.* 1907. Vol. 8, N.5. P. 145-147.

10. Wiechert E. Uber erdbebenwellen.1. Theoretisches uber die ausbreitung der erdbebenwellen // *Math. Physik. Kl.* 1907. P. 415-529.

## **INVERSE KINEMATIC PROBLEM OF SEISMOLOGY. INVERSION OF BURST REFRACTED WAVE HODOGRAPH**

**© 2013 V.Y. Burmin, Sc. Doctor (Phys.-math.)**

Institute of Physics of the Earth. O. Schmidt, RAS, Russia, 123995, Moscow,  
e-mail: burmin@ifz.ru.

One of the methods to determine the velocities of seismic waves propagation in the Earth is the inversion of seismic hodographs. This problems breaks down into two others: the first is a derivation of hodographs inversion formulas, second – to smooth the observed seismic hodographs using such functions that could satisfy the condition of solvability. It turns out that such functions are convex cubic splines. Here we solve only one problem – the inversion of burst refracted waves hodograph.

**Keywords:** seismic waves, hodographs, splines.