

УДК 550.34.013.4

DOI: 10.23671/VNC.2016.1.20716

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДАМБЫ ОБВАЛОВАНИЯ ХВОСТОХРАНИЛИЩА, МАТЕРИАЛА ОТЛОЖЕНИЯ (ХВОСТЫ) И ПОДПОДОШВЕННЫХ ГРУНТОВЫХ СЛОЕВ**

© 2016 И.Д. Музаев, д.т.н., проф.

Геофизический институт Владикавказского научного центра РАН, Россия,  
362002, г. Владикавказ, ул. Маркова, 93а;  
Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве  
Российской Федерации, 362002, г. Владикавказ, ул. Молодежная, 7,  
e-mail: muzaevid@mail.ru

Разработана математическая модель совместных сейсмических колебаний системы, состоящей из дамбы обвалования хвостохранилища, материала отложения (хвосты) и подпошвенных слоев грунтового массива. Модель представляет собой контактную краевую задачу для дифференциального уравнения сдвигово-вязких поперечных колебаний тела дамбы с материалами отложений, а также для дифференциальных уравнений сдвигово-вязких поперечных колебаний слоев массива грунта. Эти уравнения взаимосвязаны через граничные условия на контактных поверхностях. Краевая задача решена аналитически. Получены расчетные формулы для вычисления перемещений, скорости и ускорения тела дамбы при распространении падающей на систему сейсмической волны в слоях грунта и в теле дамбы.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, хвостохранилище, дамба обвалования.

### **Введение**

При активном воздействии атмосферных осадков, оползнях и при сильных сейсмических воздействиях в горных регионах особую потенциальную опасность представляют хвостохранилища отходов переработки горнодобывающей деятельности, как правило, представляющей собой значительный объем токсических веществ, создающий непосредственную угрозу населению [Бурдзиева, 2009; Заалишвили и др., 2013]. Это предполагает создавать сооружения по инженерной защите территории и производить выбор участков с определенными грунтовыми условиями (рельеф, инженерно-геологическое строение, вид грунтовых слоев, обводненность и др.) для исключения различных опасных явлений вплоть до техногенных катастроф [Бурдзиева, Заалишвили, 2009; Бурдзиева и др., 2010]. Детальное изучение проблемы позволяет производить адекватную оценку возможного экологического загрязнения территории [Бурдзиева и др., 2012; Заалишвили, Бекузарова, Бурдзиева, 2013] в условиях напряженно-деформированного состояния горных пород. Это позволяет на основе глубокого изучения ситуации управлять риском путем выбора соответствующего участка для будущего хвостохранилища и разработки специальных мероприятий по исключению, каких либо нештатных ситуаций, вплоть до его последующей реабилитации участка. Собственно это и есть основа рационального недропользования [Бурдзиева, 2010]. Особое значение при этом имеет изучение

всех элементов «сооружения», включающего природную грунтовую толщу или горный массив с искусственной дамбой (стеной и др.) в их естественном залегании.

### Математическая модель системы

Ниже рассматривается достаточно сложная инженерная система, состоящая из дамбы обвалования хвостохранилища, материала отложения (хвосты) и подподшвенных грунтовых слоев. На рис. 1а и 1б представлены схематический чертеж и расчетная схема системы, состоящей из дамбы обвалования хвостохранилища, материала отложения (хвосты) и двух подфундаментальных слоев грунта, подвергающихся поперечным колебаниям, обусловленных падающей на нижнем слое поперечной сейсмической волны.

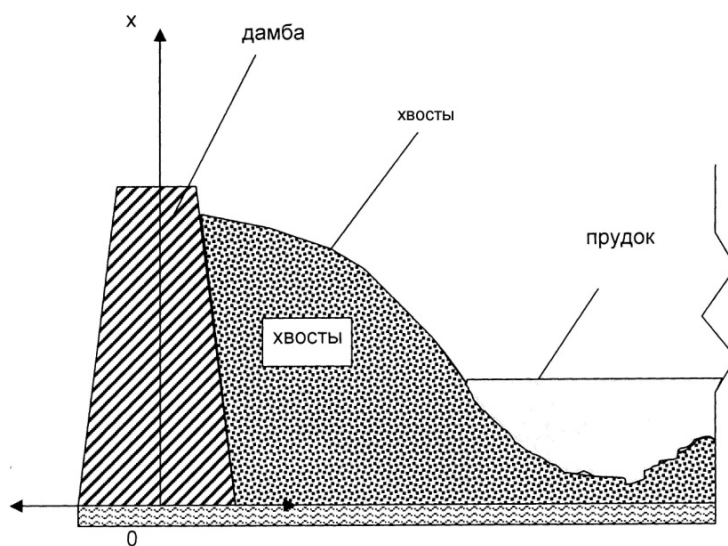


Рис. 1а). Схематический чертеж хвостохранилища

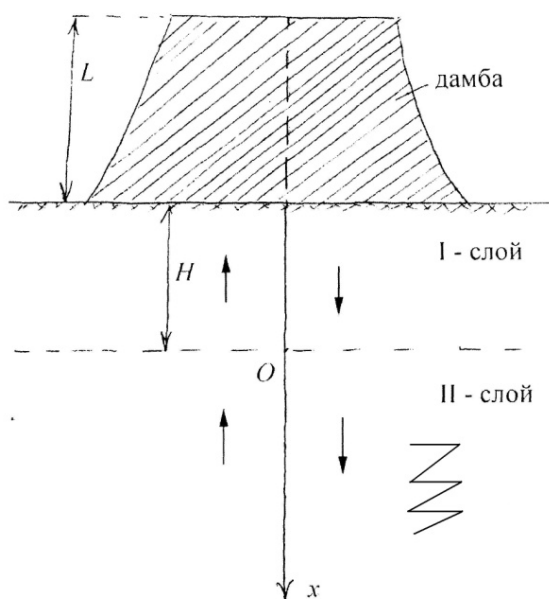


Рис. 1б). Расчетная схема сейсмических колебаний дамбы

Математическую модель колебания всей системы представляет следующая контактная краевая задача математической физики [Ворович и др., 1999; Заалишвили и др., 2007; Музаев И. и др., 2014; Хачиян, 2009; Bonnet, Heize, 1995; Окомото, 1980]:

$$\rho B \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - G \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial w}{\partial x} \right) - G \beta^* \frac{\partial}{\partial x} \left( B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - G_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \beta^* G_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x_1 < H, \quad (2)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - G_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \beta^* G_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x_2 < \infty, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$w(x, t)|_{x=L} = u_1(x_1, t)|_{x_1=0}, \quad G \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=L} = G_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}, \quad (5)$$

$$u_1|_{x_1=H} = u_2|_{x_2=0}, \quad G_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=H} = G_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}, \quad (6)$$

где приняты следующие обозначения:  $t$  – время,  $x, x_1, x_2$  – вертикальные координаты,  $w(x, t)$  – поперечные сдвиговые перемещения центральной оси тела, состоящей из дамбы и хвостов,  $B(x)$  – толщина тела,  $\rho$  и  $G$  – плотность и модуль сдвига материала тела,  $\rho_1, G_1$  и  $\rho_2, G_2$  – плотности и модули сдвига в верхнем и нижнем слое, соответственно,  $\beta^*$  – коэффициент вязкого трения в соответствии с гипотезой Кельвина–Фойгта,  $H$  – толщина верхнего слоя грунта,  $u_1$  и  $u_2$  – сдвиговые перемещения слоев грунта.

Легко заметить, что краевая задача (1)-(6) записана в разных параллельных координатных системах. Для первой системы начало отсчета взято на гребне дамбы ( $x=0=0$ ). Для второй системы начало отсчета на месте контакта дамбы и верхнего слоя грунта, а для третьей системы на месте контакта слоев грунта. Такой подход существенно облегчает решение поставленной краевой задачи.

Толщину тела (дамба с хвостами)  $B(x)$  аппроксимируем экспоненциальной функцией следующего вида:

$$B(x) = B_0 e^{Sx}, \quad S > 0, \quad (7)$$

где  $B_0$  – толщина тела на его гребне (вершине), формпараметр  $S$  вычисляется следующим образом:

$$B(x)|_{x=L} = B(L) = B_0 e^{Sx},$$

$$Sl = L \ln \frac{B(L)}{B_0}, \quad (8)$$

$$S = \frac{1}{L} \ln(B(L))$$

$$\frac{1}{B_0}$$

Плотность  $\rho$  и модуль сдвига тела вычисляются в соответствии с весовыми формулами

$$\rho = \frac{\rho_d \cdot Q_d + \rho_{xs} \cdot Q_{xs}}{Q_d + Q_{xs}}, \quad G = \frac{G_d \cdot Q_d + G_{xs} \cdot Q_{xs}}{Q_d + Q_{xs}}, \quad (9)$$

где  $\rho_d, Q_d, G_d$  и  $\rho_{xs}, Q_{xs}, G_{xs}$  – плотность, объем и модуль сдвига дамбы и хвостов соответственно.

При аппроксимации толщины  $B(x)$  тела по зависимости (7) дифференциальные уравнения (1)-(3) приводятся к следующим видам:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C^2 S \frac{\partial w}{\partial x} - \beta^* C^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \beta C^2 S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - a_1^2 \beta^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x_1 < H_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - a_2^2 \beta^* \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x_2 < \infty, \quad (12)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}. \quad (13)$$

При затухающих гармонических колебаниях системы неизвестные функции

$w(x, t)$ ,  $u_1(x_1, t)$  и  $u_2(x_2, t)$  можно искать в следующем виде:

$$w(x, t) = e^{(-\beta^* \frac{\omega^2}{2} + i\gamma\omega)t} v(x), \quad (14)$$

$$u_1(x_1, t) = e^{(-\beta^* \frac{\omega^2}{2} + i\gamma\omega)t} \left( A_1 e^{i\omega \frac{x_1}{a_1}} + B_1 e^{-i\omega \frac{x_1}{a_1}} \right), \quad (15)$$

$$u_2(x_2, t) = e^{(-\beta^* \frac{\omega^2}{2} + i\gamma\omega)t} \left( A_2 e^{i\omega \frac{x_2}{a_2}} + B_2 e^{-i\omega \frac{x_2}{a_2}} \right), \quad (16)$$

где  $v(x)$  – заранее неизвестная функция,

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^{*2} \frac{\omega^2}{4}},$$

где  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  – также заранее неизвестные постоянные величины. При этом  $A_2$  – амплитуда падающей на нижнем слое сейсмической волны. Легко можно про-

верить, что функции (15) и (16) автоматически удовлетворяют дифференциальным уравнениям (11) и (12) соответственно.

В результате подстановки выражения (14) в дифференциальном уравнении (10) для неизвестной функции  $v(x)$  получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + S \frac{dv}{dx} + \frac{\omega^2}{C^2} v = 0. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (2.17) имеет следующий вид:

$$v(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) & \text{при } \frac{\omega^2}{C^2} > \frac{S^2}{4}, \\ e^{\alpha x} (C_1 \operatorname{sh} \beta x + C_2 \operatorname{ch} \beta x) & \text{при } \frac{\omega^2}{C^2} < \frac{S^2}{4}, \\ e^{\alpha x} (C_1 x + C_2) & \text{при } \frac{\omega^2}{C^2} = \frac{S^2}{4}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\alpha = -\frac{S}{2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{C^2} - \frac{S^2}{4}}. \quad (19)$$

Сперва рассмотрим первый случай, когда имеет место неравенство

$$\frac{\omega^2}{C^2} > \frac{S^2}{4}. \quad (20)$$

$$v(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) v(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x).$$

Постоянные  $C_1, C_2, A_1, B_1, A_2, B_2$  определяются в процессе удовлетворения граничным условиям (4)-(6). Для них получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \beta C_1 + \alpha C_2 = 0, \\ e^{\alpha L} (C_1 \sin \beta L + C_2 \cos \beta L) = A_1 + B_1, \\ G[\beta(C_1 \cos \beta L - C_2 \sin \beta L) + \alpha(C_1 \sin \beta L + C_2 \cos \beta L)]e^{\alpha L} = G_1 \frac{i\omega}{a_1} (A_1 - B_1), \\ A_1 e^{i\omega \frac{H}{a_1}} + B_1 e^{-i\omega \frac{H}{a_1}} = A_2 + B_2, \\ G_1 \frac{i\omega}{a_1} (A_1 e^{i\omega \frac{H}{a_1}} - B_1 e^{-i\omega \frac{H}{a_1}}) = G_2 \frac{i\omega}{a_2} (A_2 - B_2). \end{cases} \quad (21)$$

В системе (21) число уравнений 5, а число неизвестных постоянных равно 6. В связи с этим система недоопределена.

В дальнейшем будем задавать амплитуду падающей на нижнем слое сейсмической волны  $A_2$ . Тогда система (21) становится определенной системой относительно постоянных  $C_1, C_2, A_1, B_1$  и  $B_2$ . Решение системы (21) получается в следующем виде:

$$A_1 = 2A_2 \frac{r_2}{\Delta^*}, \quad B_1 = -2A_2 \frac{r_1}{\Delta^*}, \quad C_1 = -4A_2 \frac{\alpha}{\Delta} e^{-\alpha L} \frac{i\omega}{K_0 C \Delta^*}, \quad C_2 = 4A_2 \frac{\beta}{\Delta} e^{-\alpha L} \frac{i\omega}{K_0 C \Delta^*}, \quad (22)$$

$$A_1 = 2A_2 \frac{r_2}{\Delta^*}, \quad B_1 = -2A_2 \frac{r_1}{\Delta^*}, \quad C_1 = -4A_2 \frac{\alpha}{\Delta} e^{-\alpha L} \frac{i\omega}{K_0 C \Delta^*}, \quad C_2 = 4A_2 \frac{\beta}{\Delta} e^{-\alpha L} \frac{i\omega}{K_0 C \Delta^*}, \quad (22)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\Delta = \beta \cos \beta L - \alpha \sin \beta L, \quad \Delta^* = (1 + K_1) r_2 e^{i\omega \frac{H}{\alpha_1}} - (1 - K_1) r_1 e^{-i\omega \frac{H}{\alpha_1}}, \quad (23)$$

$$r_1 = -S_1 \frac{\alpha}{\Delta} + S_2 \frac{\beta}{\Delta} - \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C}, \quad r_2 = -S_1 \frac{\alpha}{\Delta} + S_2 \frac{\beta}{\Delta} + \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C}, \quad (24)$$

$$S_1 = \beta \cos \beta L + \alpha \sin \beta L, \quad S_2 = -\beta \sin \beta L + \alpha \cos \beta L, \quad (25)$$

$$K_0 = \frac{G a_1}{G_1 C} = \frac{\rho C}{\rho_1 a_1}, \quad K_1 = \frac{G_1 a_2}{G_2 a_1} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}. \quad (26)$$

Подставив значения  $S_1$  и  $S_2$  из (25) в (24), получим

$$r_1 = -\frac{\omega^2 \sin \beta L}{C^2 \Delta} - \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C}, \quad r_2 = -\frac{\omega^2 \sin \beta L}{C^2 \Delta} + \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C}. \quad (27)$$

Подставим значения  $r_1$  и  $r_2$  из (27) в (23)

$$\Delta^* = (1 + K_1) \left( -\frac{\omega^2 \sin \beta L}{C^2 \Delta} + \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C} \right) e^{i\omega \frac{H}{\alpha_1}} - (1 - K_1) \left( -\frac{\omega^2 \sin \beta L}{C^2 \Delta} - \frac{1}{K_0} \frac{i\omega}{C} \right) e^{-i\omega \frac{H}{\alpha_1}}.$$

В результате использования формулы Эйлера выражение для  $\Delta \cdot \Delta^* K_0 \Delta \cdot \Delta^* K_0$  упрощается и приводится к следующему виду:

$$K_0 \Delta \Delta^* = -2 \left[ K_1 \left( \frac{K_0 \frac{\omega^2}{C^2} \sin \beta L \cos \frac{\omega H}{\alpha_1} + \frac{\omega}{C} \Delta \sin \omega H}{\alpha_1} \right) + \left( \frac{K_0 \frac{\omega^2}{C^2} \sin \beta L \sin \frac{\omega H}{\alpha_1} - \frac{\omega}{C} \Delta \cos \omega H}{\alpha_1} \right) i \right]. \quad (28)$$

Подставив значения  $C_1$  и  $C_2$  из (22) в выражение (20) для  $v(x)$ , получим

$$v(x) = 2A_2 \frac{i\omega (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{C \operatorname{Re} \tilde{\Delta} + i \operatorname{Im} \tilde{\Delta}},$$

$$\operatorname{Re} \tilde{\Delta} = K_1 \left( \frac{K_0 \frac{\omega^2}{C^2} \sin \beta L \cos \frac{\omega H}{\alpha_1} + \frac{\omega}{C} \Delta \sin \omega H}{\alpha_1} \right), \quad (29)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\Delta} = K_0 \left( \frac{K_0 \frac{\omega^2}{C^2} \sin \beta L \sin \frac{\omega H}{\alpha_1} - \frac{\omega}{C} \Delta \cos \omega H}{\alpha_1} \right)$$

Первоначально неизвестная функция  $w(x, t)$  получается в следующем комплексном виде:

$$w(x, t) = 2A_2 \frac{i\omega (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{C \operatorname{Re} \tilde{\Delta} + i \operatorname{Im} \tilde{\Delta}} e^{-\alpha(L-x)} e^{\left(-\beta^* \frac{\omega^2}{2} + i\gamma\omega\right)t}, \quad (30)$$

Действительная часть выражения (30) будет решением поставленной краевой задачи (1)-(7) при условии  $\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{s^2}{4}$ .

$$w(x, t) = 2A_2 \frac{i\omega (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{C \operatorname{Re} \tilde{\Delta} + i \operatorname{Im} \tilde{\Delta}} e^{-\alpha(L-x)} e^{(-\beta^* \frac{\omega^2}{2} + i\gamma\omega)t}, \quad (31)$$

Для амплитуды сейсмических колебаний тела дамбы получается следующее выражение:

$$y_1 = 2A_2 \frac{\omega |\alpha \sin \beta_1 x - \beta_1 \cos \beta_1 x|}{C \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{\Delta}_1)^2 + (\operatorname{Im} \tilde{\Delta}_1)^2}} e^{-\alpha(L-x)} e^{-\beta^* \frac{\omega^2}{2} t}. \quad (32)$$

Во втором случае когда имеет место неравенство

$$\frac{\omega^2}{c^2} < \frac{s^2}{4} \quad (33)$$

для амплитуды колебания тела дамбы получают следующие выражения:

$$y_2 = 2A_2 \frac{\omega |\alpha \operatorname{sh} \beta_2 x - \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2 x|}{C \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{\Delta}_2)^2 + (\operatorname{Im} \tilde{\Delta}_2)^2}} e^{-\alpha(L-x)}, \quad (34)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\operatorname{Re} \tilde{\Delta}_2 = K_1 \left( K_0 \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{sh} \beta_2 L \cos \frac{\omega H}{a_1} + \frac{\omega}{c} \Delta_2 \sin \frac{\omega H}{a_1} \right), \quad (35)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\Delta}_2 = K_0 \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{sh} \beta_2 L \sin \frac{\omega H}{a_1} - \frac{\omega}{c} \Delta_2 \cos \frac{\omega H}{a_1},$$

$$\Delta_2 = \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2 L - \alpha \operatorname{sh} \beta_2 L. \quad (36)$$

Для третьего случая, когда выполняется равенство  $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{s^2}{4}$ , для вычисления амплитуды колебания тела дамбы получают следующие формулы:

$$y_3 = 2A_2 \frac{\omega |\alpha x - 1|}{C \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{\Delta}_3)^2 + (\operatorname{Im} \tilde{\Delta}_3)^2}} e^{-\alpha(L-x)} e^{-\beta^* \frac{\omega^2}{2} t}, \quad (38)$$

$$\operatorname{Re} \tilde{\Delta}_3 = K_1 \left( K_0 L \frac{\omega^2}{c^2} \cos \frac{\omega H}{a_1} + \frac{\omega}{c} (1 - \alpha L) \sin \frac{\omega H}{a_1} \right), \quad (39)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\Delta}_3 = K_0 L \frac{\omega^2}{c^2} \sin \frac{\omega H}{a_1} - \frac{\omega}{c} (1 - \alpha L) \cos \frac{\omega H}{a_1}.$$

Показатель затухания сейсмической волны равен  $\beta \frac{\omega^2}{2}$ . Для грунтового массива  $\beta^* \approx 0,02$  (сек) [Bonnet, Heize, 1995]. Круговая частота падающей сейсмической волны  $\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu$  – частота в герцах. Полученные формулы (34)-(38) показывают, что высококачественные сейсмические волны в теле дамбы практически не

распространяются. Так, например, при частотах  $\nu = 6 - 10$  герц показатель затухания в системе СИ изменяется в пределах  $14-40 \text{ с}^{-1}$  и, следовательно, волна за доли секунды затухает. Низкочастотные сейсмические волны с незначительным затуханием распространяются в теле дамбы. Перемещения скорости и ускорения в теле дамбы можно вычислить с помощью полученных формул (34)-(38).

В частном случае, когда высота дамбы равна нулю,  $L = 0$ , полученные формулы сильно упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$y = \frac{2A_2}{\sqrt{\frac{K_1^2 \sin^2 \omega H}{a_1} + \frac{\cos^2 \omega H}{a_1}}} e^{-\beta \frac{\omega^2}{2} t}. \quad (40)$$

Эта формула показывает, что при выходе низкочастотной сейсмической волны из однородной грунтовой среды на дневную поверхность ее амплитуда в начальный момент в два раза усиливается, а затем затухает по экспоненциальному закону с показателем степени  $\beta \frac{\omega}{2}$ .

На рис. 2–5 представлены зависимости относительной амплитуды и относительного ускорения гребня дамбы от ее высоты при различных значениях частоты сейсмических колебаний местности возведения дамбы. На оси ординат отмерены отношения амплитуды колебания гребня дамбы к амплитуде падающей сейсмической волны. На оси абсцисс отмерены высоты дамбы до 150 м. Точно такие же зависимости получают для относительного ускорения гребня дамбы. Как показывают эти графики, указанные относительные характеристики существенно зависят от высоты дамбы. Например, при частоте падающей сейсмической волны 1 Гц дамба высотой от 65 м до 110 м представляется менее сейсмостойкой, чем дамба высотой от 110 м до 150 м.

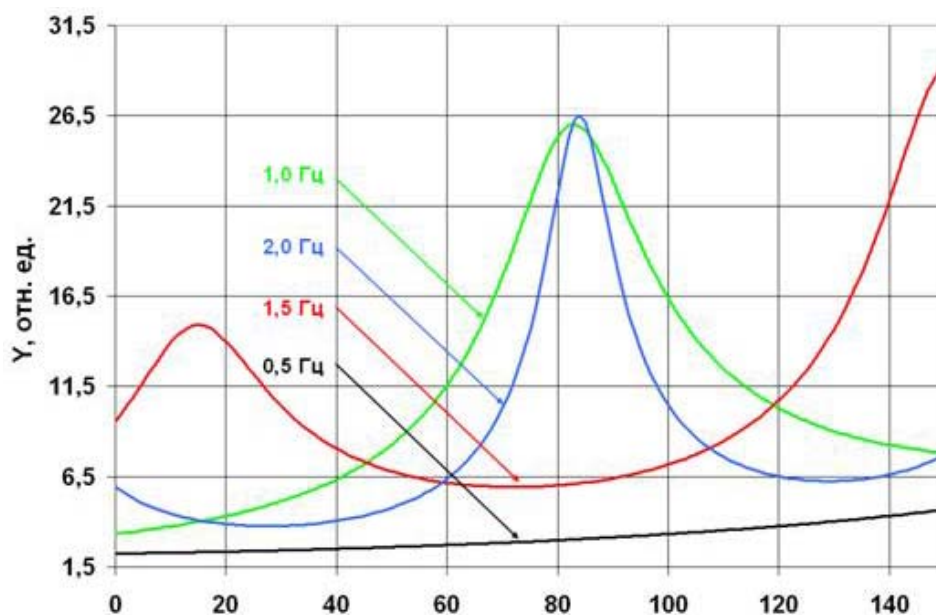


Рис. 2. Зависимости относительных амплитуд смещений и ускорений гребня дамбы от ее высоты для разных частот падающей волны (0,5 Гц–2,0 Гц).



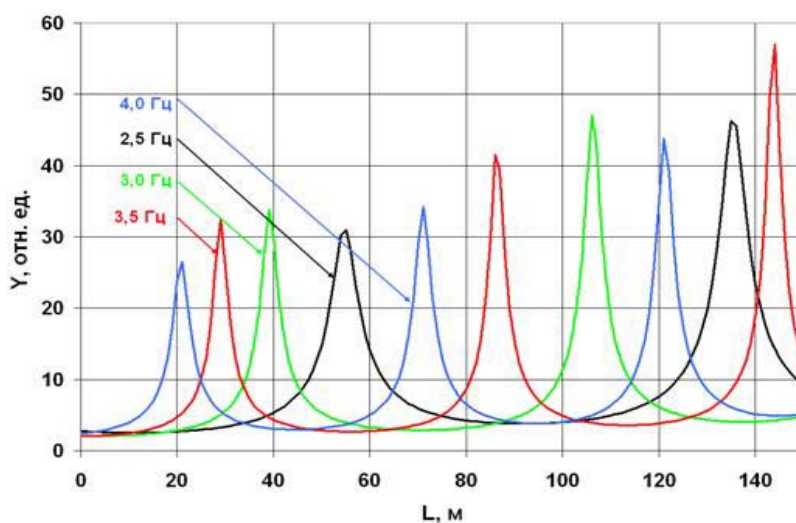


Рис. 3. Зависимости относительных амплитуд смещений и ускорений гребня дамбы от ее высоты для разных частот падающей волны (2,5 Гц–4,0 Гц).

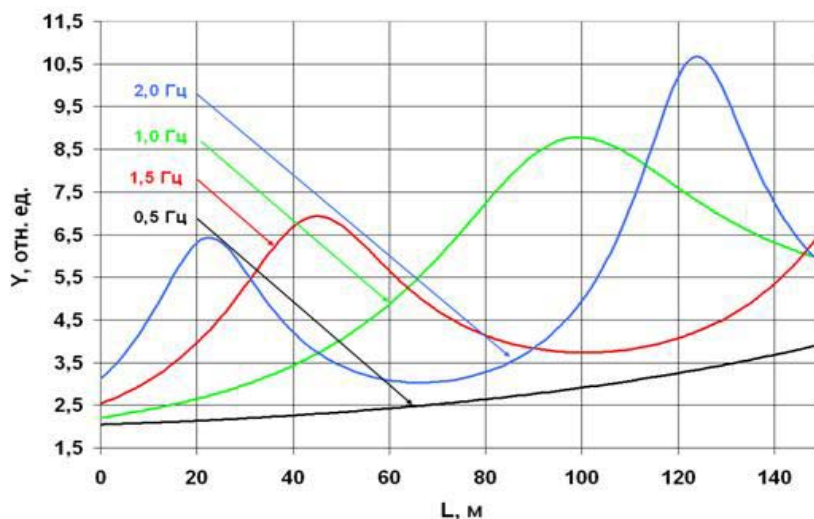


Рис. 4. Зависимости относительных амплитуд смещений и ускорений гребня дамбы от ее высоты для разных частот падающей волны (0,5 Гц–2,0 Гц).

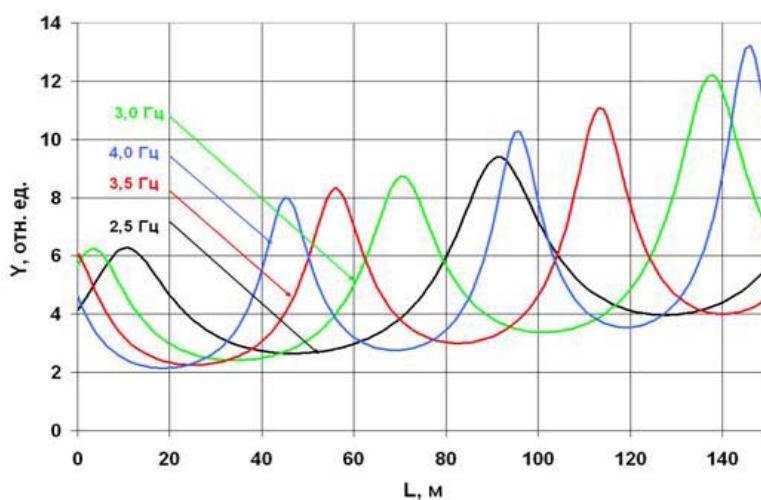


Рис. 5. Зависимости относительных амплитуд смещений и ускорений гребня дамбы от ее высоты для разных частот падающей волны (2,5 Гц–4,0 Гц).

### Выводы

1. Составлена математическая модель сейсмических колебаний системы, состоящей из дамбы обвалования хвостохранилища, хвостов и слоев грунтовой толщи под подошвой дамбы. Модель представляет контактную краевую задачу для трех дифференциальных уравнений поперечных сдвиговых колебаний тела дамбы с хвостами и двух подподошвенных слоев грунтовой толщи с разными физико-механическими и мощностными характеристиками.

2. В результате решения поставленной краевой задачи в явных видах получены расчетные формулы для вычисления относительных амплитуд перемещений, скоростей и ускорений тела дамбы от ее высоты и от частоты сейсмических колебаний местности.

3. Полученные теоретические результаты позволяют на стадии проектирования хвостохранилища так подобрать габаритные размеры ограждающей хранилища дамбы, чтобы при сейсмических ситуациях ускорения и смещения тела дамбы не превышали предельно допустимые значения.

### Литература

1. Бурдзиева О.Г. Механизм влияния хвостов обогащения на окружающую среду // В сборнике: Сейсмическая опасность и управление сейсмическим риском на Кавказе. Труды III Кавказской международной школы-семинара молодых ученых. Центр геофизических исследований ВНЦ РАН и РСО-А; ред.: Николаев А.В., Заалишвили В.Б.. 2009. С. 361-365.

2. Бурдзиева О.Г., Заалишвили В.Б. Исследование влияния хвостохранилища на окружающую среду в условиях высокой сейсмической опасности // В сборнике: Сейсмическая опасность и управление сейсмическим риском на Кавказе. Труды III Кавказской международной школы-семинара молодых ученых. Центр геофизических исследований ВНЦ РАН и РСО-А; ред.: Николаев А.В., Заалишвили В.Б. 2009. С. 355-360.

3. Бурдзиева О.Г. Рациональное недропользование в регионе РСО – Алания (проблемы и пути их решения) Уголь. 2010. №7 (1011). С. 70-71

4. Бурдзиева О.Г., Шевченко Е.В., Ермишина Е.Б. Механизм возникновения техногенных катастроф под влиянием горного производства // В сборнике: Опасные природные и техногенные геологические процессы на горных и предгорных территориях Северного Кавказа Центр геофизических исследований, Заалишвили В.Б. (редактор). 2010. С. 157-161.

5. Бурдзиева О.Г., Заалишвили В.Б., Бериев О.Г., Закс Т.В., Кануков А.С. Об экологических аспектах современной урбанизированной территории при сильных землетрясениях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2012. №3. С. 62-67.

6. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный Мир, 1999. 246 с.

7. Заалишвили В.Б., Музаев И.Д., Туаева Ж.Д. Математическое моделирование сейсмических колебаний грунтовой толщи в основании застройки // Труды международной научно-практической конференции «Опасные природные и

техногенные геологические процессы на горных и предгорных территориях Северного Кавказа». Владикавказ, 2007. С. 290-298.

8. Заалишвили В.Б., Бекузарова С.А., Бурдзиева О.Г. Оценка техногенного загрязнения территории // В сборнике: Сейсмическая опасность и управление сейсмическим риском на Кавказе. Труды V Кавказской международной школы-семинара молодых ученых; ред.: В. Б. Заалишвили. 2013. С. 353-355.

9. Заалишвили В.Б., Бериев О.Г., Бурдзиева О.Г., Закс Т.В., Кануков А.С. Онкозаболеваемость населения г. Владикавказа и его взаимосвязь с различными факторами // Геология и геофизика Юга России. 2013. № 3. С. 29-38.

10. Музаев И.Д., Музаев Н.И., Харебов К.С. Постановка и решение многослойной краевой задачи сейсмических колебаний высотного сооружения // Сейсмическое строительство, безопасность сооружений. 2014. №1. С. 22-25.

16. Окамото М. Сейсмостойкость инженерных сооружений. М., 1980. 342 с.

11. Хачиян Э.Е. Задача усиления или ослабления эффекта сейсмического воздействия на поверхности земли // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко «Исследования по теории сооружений» №1 (XXVI). М., 2009. С. 67-80.

12. Bonnet G., Heize J.F. Non linear seismic response of a soft layer // 10-th European conference on Earthquake Engineering. Duma (et). 1995, Balkema, Rotterdam. P. 361-364.

DOI: 10.23671/VNC.2016.1.20716

## **MATHEMATICAL SIMULATION OF THE SYSTEM SEISMIC FLUCTUATIONS, WHICH CONSISTS OF THE TAILINGS DUMP EMBANKMENT DAM, THE MATERIAL OF DEPOSIT (TAILS) AND UNDER BOTTOM GROUND LAYERS**

**© 2016 I.D. Muzaev, Sc (Doct.Techn.), Prof.**

Geophysical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, 93a, Markov st.,  
Vladikavkaz, 362002, Russia  
Vladikavkaz branch of the Federal State Budget Institution of Higher Education  
“Financial University under the Government of the Russian Federation”, 7,  
Molodezhnaia st., Vladikavkaz, 362002, Russia,  
e-mail: muzaevid@mail.ru

The mathematical model of the system seismic vibrations, which consists of the tailings dump embankment dam, the material of deposit (tails) and under bottom ground layers is developed. Model is contact boundary-value problem for the differential equation of the dam body shift- viscous lateral oscillations with the materials of deposits, and also for the differential equations of the shift- viscous lateral oscillations of the ground layers. These equations are interconnected through the

boundary conditions on the contact surfaces. Boundary-value problem is solved analytically. Calculation formulas for enumerating of displacements, velocity and acceleration calculation of the dam body with the seismic wave propagation in the ground layers and into in the dam body.

**Keywords:** mathematical simulation, tailings dump, the dam of banking up.