ГИДРОГЕОЛОГИЯ

УДК 517; 532
DOI: 10.46698/VNC.2026.67.18.001

Оригинальная статья

Теоретические основы селективного способа отбора воды из внутреннего пространства стратифицированного водоема

И.Д. Музаев[1,2], **К.С. Харебов**[1], **Н.И. Музаев**[1]

[1] Геофизический институт Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362002, г. Владикавказ, ул. Маркова, 93а;

[2] Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия, 362002, г. Владикавказ, ул. Молодежная, 7, e-mail: muzaevid@mail.ru

Статья поступила: 11.03.2026, доработана: 17.08.2026, принята к публикации: 20.08.2026

Резюме: Актуальность работы. Поставлена и решена контактная начально-краевая задача, моделирующая процесс селективного отбора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема. В промежуточном слое вода бывает холоднее на 8–10 °С, чем в поверхностном, и чище от наносов, чем в нижнем, придонном слое. Такой способ отбора воды бывает необходим для технического водоснабжения промышленных предприятий, использующих высокотемпературные тепловыделяющие устройства. К ним причисляются тепловые и атомные электростанции. **Цель исследования.** Разработка нового эффективного способа селективного забора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема. **Объект исследования.** Водоем геометрически схематизирован в виде вертикального цилиндра с осевой симметрией. Краевая задача составлена в цилиндрической системе координат. Вода из промежуточного слоя забирается трубой, опущенной через свободную поверхность водоема внутрь промежуточного слоя. **Метод исследования.** Начально-краевая задача решена аналитическими методами математической физики. Применены интегральное преобразование Лапласа по времени и конечное интегральное преобразование Бесселя по горизонтальной цилиндрической координате. **Результаты исследования.** В результате решения начально-краевой задачи получена совокупность расчетных формул для вычисления критического расхода забираемой воды. Расчет и проектирование селективных водоотборных устройств и процессов на основе полученной совокупности формул гарантируют селективный отбор воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема.

Ключевые слова: стратифицированный водоем, начально-краевая задача, интегральное преобразование Лапласа, конечное интегральное преобразование Бесселя, критическое положение поверхности раздела слоев воды, критический расход.

Для цитирования: Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Теоретические основы селективного способа отбора воды из внутреннего пространства стратифицированного водоема. *Геология и геофизика Юга России*. 2026. 16(3): 22–33. DOI: 10.46698/VNC.2026.67.18.001

HYDROGEOLOGY

DOI: 10.46698/VNC.2026.67.18.001

Original paper

Theoretical foundations of the selective method of water extraction from the interior of a stratified reservoir

I.D. Muzaev[1,2], K.S. Kharebov[1], N.I. Muzaev[1]

[1] Geophysical Institute, Vladikavkaz Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, 93a Markova Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation;

[2] Vladikavkaz branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, 7 Molodezhnaya Str., Vladikavkaz 362002, Russian Federation, e-mail: muzaevid@mail.ru

Received: 11.03.2026, revised: 17.08.2026, accepted: 20.08.2026

Abstract: Relevance. A contact initial boundary value problem modeling the process of selective water extraction from the intermediate water layer of a three-layer stratified reservoir has been posed and solved. In the intermediate layer, the water is cooler by 8°-10° than in the surface layer and with lower sediment content than in the lower bottom layer. This method of water extraction may be necessary for the technical water supply of industrial enterprises using high-temperature heat-generating devices. These include thermal and nuclear power plants. **Aim.** Development of a new effective method for selective water intake from the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir. **The object of research.** The reservoir is geometrically schematized as a vertical cylinder with axial symmetry. The boundary value problem is formulated in a cylindrical coordinate system. The water from the intermediate layer is taken up by a pipe lowered through the free surface of the reservoir into the intermediate layer. **Methods.** The initial boundary value problem is solved by analytical methods of mathematical physics. The integral Laplace transform in time and the finite integral Bessel transform in horizontal cylindrical coordinates are applied. **Results.** As a result of solving the initial boundary value problem, a set of calculation formulas for calculating the critical flow rate of the withdrawn water was obtained. The calculation and design of selective water collection devices and processes based on the obtained set of formulas guarantees selective water extraction from the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir. The calculation and design of selective water collection devices and processes based on the obtained set of formulas guarantees selective water extraction from the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir.

Keywords: stratified reservoir, initial boundary value problem, integral Laplace transform, finite integral Bessel transform, critical position of the interface of water layers, critical flow rate.

For citation: Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Theoretical foundations of the selective method of water extraction from the interior of a stratified reservoir. *Geologiya I Geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Russian South.* (in Russ.). 2026. 16(3): 22–33. DOI: 10.46698/VNC.2026.67.18.001

Введение

В летнее время в водоемах-источниках технического водоснабжения происходит температурная стратификация. В глубинном слое вода бывает холоднее на 8–10 °С, чем в поверхностном слое [Аверкиев и др., 1969; Музаев и др., 2020, 2025].

На промышленных предприятиях имеются устройства, в которых происходят высокотемпературные тепловые процессы, например в конденсаторах турбин тепловых и атомных электростанций. Для охлаждения и отвода излишнего тепла к таким устрой-

ствам надо подавать воду из глубинного холодного слоя стратифицированного водоема. Иначе из-за перегрева устройства на предприятии может произойти авария с тяжелыми геоэкологическими последствиями.

На рисунке 1 представлена расчетная схема селективного отбора воды из нижнего слоя двухслойного стратифицированного водоема. Вода забирается трубой, подведенной через дно водоема внутрь нижнего слоя. При заборе воды через трубу поверхность раздела слоев сильно искривляется. На ней образуются гравитационные внутренние волны. При определенном значении расхода (скорости) забираемой воды через трубу поверхность раздела слоев может опускаться до проема трубы. Поверхность раздела слоев принимает форму стоячей уединенной волны, как это показано на рисунке 1. Такое положение поверхности раздела слоев называется верхним критическим положением. Расход воды через трубу, который создает критическое положение поверхности раздела слоев, называется критическим расходом. Очевидно, что при дальнейшем увеличении расхода воды выше критического разрушится селективный отбор воды из нижнего слоя. Вода из верхнего слоя будет поступать в проем водозаборной трубы.

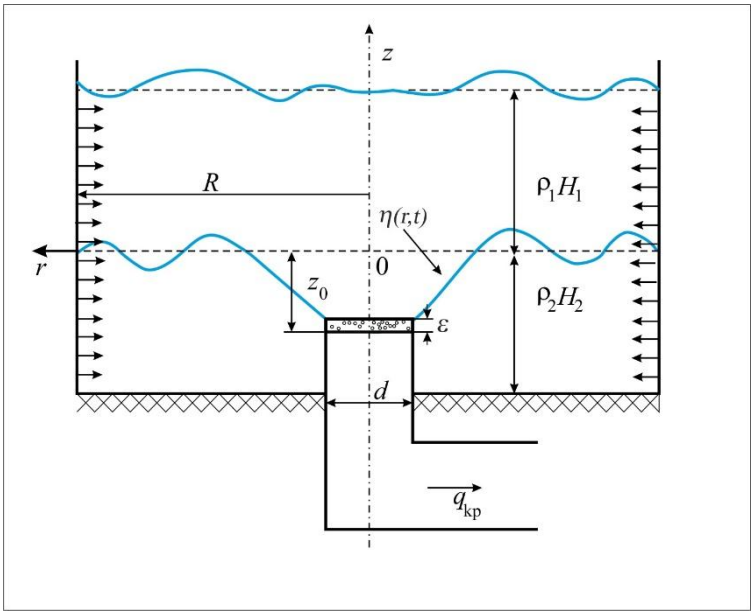

Рис. 1. Расчетная схема селективного отбора воды из нижнего слоя /
Fig. 1. Calculation scheme of selective water extraction from the lower layer

В справочных литературных источниках, а также в строительных нормах и правилах для расчета и проектирования устройств отбора воды из нижнего слоя рекомендуется проводить расчет по эмпирической формуле Д. Харлемана, которая имеет следующий вид [Harleman, Stolzenbach, 1972; Музаев и др., 2020]:

$$q_{kp} = 1{,}42\pi z_0^2 \sqrt{gd\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}},$$

где H_2 – толщина воды в нижнем слое водоема, ρ_1 и ρ_2 – плотности воды в верхнем и нижнем слоях соответственно, g – ускорение силы тяжести, π=3,14.

Представленная выше формула рекомендована только для случая, когда водозаборная труба подведена заподлицо с дном водоема. Как видно, в этой формуле не содержится ни диаметр трубы, ни толщина верхнего слоя водоема.

Для случая, когда вода отбирается из верхнего слоя трубой, опущенной через свободную поверхность водоема внутрь верхнего слоя, расчетная схема представлена на

рисунке 2. В справочных литературных источниках, а также в строительных нормах и правилах для расчета и проектирования устройств отбора воды из верхнего слоя расчет рекомендуется проводить по эмпирической формуле Давидиана-Гловера [Аверкиев и др., 1969; Справочник…, 1977; Craya, 1949; Методические…, 2003; Музаев и др., 2020], имеющей следующий вид:

$$q_{кр} = 1{,}42\pi z_0^2 \sqrt{gd\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}},$$

где z_0 – расстояние от первоначального горизонтального положения поверхности раздела слоев до проема трубы, d – диаметр трубы. Остальные идентификаторы такие же, как в формуле Д. Харлемана.

В этой формуле также не содержатся толщины слоев воды в водоеме.

В связи с перечисленными недостатками расчет и проектирование селективных водоотборных устройств и процессов в некоторых случаях могут не гарантировать селективный отбор воды, как из нижнего, так и из верхнего слоев стратифицированного водоема. Такое заключение сделано на том основании, что диаметр трубы и толщина верхнего слоя водоема существенно влияют на значение критического расхода отобранной воды из нижнего слоя. А в эмпирической формуле Д. Харлемана эти параметры не содержатся.

В формуле Давидиана-Гловера не содержатся толщины слоев воды в водоеме.

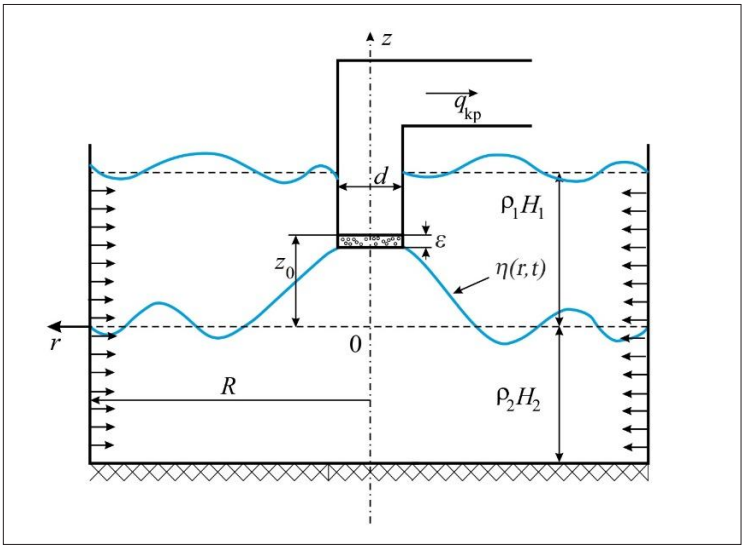

Рис. 2. Расчетная схема селективного отбора воды из верхнего слоя /
Fig. 2. Calculation scheme of selective water extraction from the upper layer

Методы исследования

Полагается, что в цилиндрической системе координат (r;z), часть пространства, ограниченная условиями $0<r>R$; $H_2<z<H_1$ занята трехслойным стратифицированным водоемом – источником технического водоснабжения некоторого промышленного предприятия. Вода отбирается из промежуточного слоя водоема по трубе, как показано на схематическом рисунке 3. Водоем геометрически схематизирован в виде вертикального цилиндра радиусом R. H_1 H_2, H_3 – толщины верхнего, промежуточного и нижнего слоев воды соответственно. Принимается, что в начальный момент времени t = 0, то есть до включения водозаборного устройства, вода в слоях была неподвижна. Поверхности раздела слоев и свободная поверхность водоема горизонтальны. Вода считается идеальной несжимаемой жидкостью, а движение воды считается безвихревым (потенциальным) [Karplus, 1956; Басниев и др., 1993; Маскет, 1953].

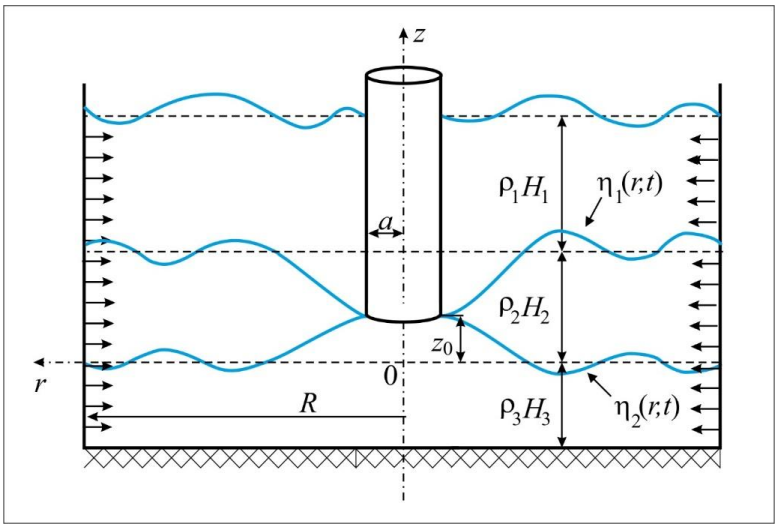

Рис. 3. Расчетная схема задачи селективного отбора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема /

Fig. 3. Calculation scheme of the problem of selective water extraction from the intermediate layer of a three-layered stratified reservoir

Эти упрощающие предположения положены в основу гидродинамической теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости [Шокин и др., 2015; Сретенский, 1977; Штеренлихт, 2004; Гавич, 1988; Чарный, 1968; Гинзбург, 1970; Белолипецкий и др., 1991; Музаев и др., 2020, 2025], а также метода источников и стоков [Garabedian, 1956]. Физико-математической моделью движения воды в слоях будет следующая контактная пространственная начально-краевая задача [Вазов, Форсайт, 1963; Заалишвили и др., 2024; Корн, Корн, 1977; Кошляков и др., 1970; Ламб, 1947; Harleman, Stolzenbach, 1972; Букреев, 2010]:

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z_1^2}=0,\ 0<z_1<H_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z_2^2}=-\frac{qZ(z)f(r)}{\pi \mathrm{a}^2\varepsilon}+\frac{q\overline{f(r)}}{[\pi R^2-\pi(R-\varepsilon)^2]*H_1},\ 0<z_2<H_2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_3}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z_2^2}=0,-H_3<z_2<0 \quad (3)$$

$$\varphi_i=\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathrm{t}}=0, \text{при } t=0; \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathrm{r}}\right|_{r=0}=0,\quad \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathrm{r}}\right|_{r=R}=0,\ i=1,2,3 \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right|_{z_1=H_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right|_{z_1=0}=\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right|_{z_2=H_2}\ \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right|_{z_2=0}=\left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_2}\right|_{z_2=0} \quad (6)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+g\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right)\Big|_{z_1=0}=\rho_2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=H_2}, \quad (7)$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=0}=\rho_3\left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}+g\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=0},\ \left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_2}\right|_{z_2=-H_3}=0, \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения и предположения: r и z – цилиндрические координаты переменной точки; $\varphi_1(r,z_1,t)$, $\varphi_2(r,z_2,t)$, $\varphi_3(r,z_2,t)$ – потенциалы скоростей движения воды в верхнем, промежуточном и нижнем слоях соответственно; H_1 H_2, H_3 – толщины верхнего, промежуточного и нижнего слоев воды соответственно; q (t) – расход воды через трубу; a – внутренний радиус трубы; $f(r)$; $\overline{f(r)}$; $Z(z)$ – вспомогательные функции определенные следующим образом:

$$f(r)=\begin{cases}1, если\ r\in(0;a)\\ 0, если\ r\notin(0;a)\end{cases}, \overline{f(r)}=\begin{cases}1, если\ r\in(R-\varepsilon,R)\\ 0, если\ r\notin(R-\varepsilon,R)\end{cases} \quad (9)$$
$$Z(z)=\begin{cases}1, если\ z\in(z_0-\varepsilon;z_0)\\ 0, если\ z\notin(z_0-\varepsilon;z_0)\end{cases},$$

ε – вспомогательная бесконечно малая величина, которая устремляется к нулю в определенном месте в процессе решения поставленной начально-краевой задачи.

Комментарии относительно составленной начально-краевой задачи:

1. Первое слагаемое правой чисти дифференциального уравнения (2) моделирует отток из элементарного цилиндра высотой ε, примыкающего к проему водозаборной трубы. Расход оттока воды q равен расходу забираемой воды через трубу. Второе слагаемое в правой части того же уравнения моделирует исток воды в кольцевом цилиндре радиусами R-ε и R и высотой H_2 с тем же расходом q. Цилиндр с большой поверхностью примыкает к условно боковой поверхности водоема при r=R. Очевидно, что при $\varepsilon\to0$ правая сторона дифференциального уравнения моделирует процесс затекания воды в проем водозаборной трубы и синхронного затекания воды в водоем через условную поверхность при r=R в пределах $0<z_2<H_2$.

2. Граничные условия при r=0 выражают условие симметрии относительно центральной оси водозаборной трубы при условии $a\to0$, где a – радиус трубы. Граничное условие при r=R выражает неподвижность условной цилиндрической поверхности r=R, а также процесс синхронного затекания воды через нее. Граничные условия на контактных поверхностях при z_1=0, z_2=H_2, z_2=0 выражают равенство вертикальных составляющих скоростей в слоях, а также равенство гидродинамических давлений в слоях воды.

3. Составленная контактная начально-краевая задача записана в двух разных координатных системах (r, z_1) и (r, z_2). Если количество слоев больше двух, то такой подход к решению контактной начально-краевой задачи существенно сокращает кропотливые математические выкладки и облегчает путь решения начально-краевой задачи.

При известных потенциалах $\varphi_1(r,z_1,t)$, $\varphi_2(r,z_2,t)$, $\varphi_3(r,z_2,t)$ уравнение поверхности раздела верхнего и промежуточного слоев $\eta_2(r,z_2,t)$, а также уравнение поверхности между промежуточным и нижним слоями вычисляются при помощи следующих формул [Craya, 1949; Музаев и др., 2020; Музаев и др., 2020; Шокин и др., 2015]:

$$\eta_1(r,t)=\frac{1}{(\rho_2-\rho_1)g}\left(\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big|_{z_1=0}-\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\Big|_{z_2=H_2}\right),$$
$$\eta_2(r,t)=\frac{1}{(\rho_3-\rho_2)g}\left(\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}-\rho_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\right)\Big|_{z_2=0}.$$

Для решения поставленной начально-краевой задачи вначале к выражениям (1)–(9) применяются интегральные преобразования Лапласа по времени t и конечное интегральное преобразование Бесселя по переменной r в промежутке $r\in(0;R)$. В результате таких преобразований начально-краевая задача (1)–(9) приводится к такому виду:

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_{1,n}}{dz_1^2}-\lambda_n^2\tilde{\varphi}_{1,n}=0, 0<z_1<H_1, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_{2,n}}{dz_2^2}-\lambda_n^2\tilde{\varphi}_{2,n}=-\frac{\tilde{q}Z(z_1)}{\pi a^2\varepsilon}\int_0^a rJ_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr+\frac{\tilde{q}}{2\pi\varepsilon}\int_{R-\varepsilon}^R rJ_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr, \quad (11)$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_{3,n}}{dz_2^2}-\lambda_n^2\tilde{\varphi}_{3,n}=0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_{1,n}}{\partial z_1}\Big|_{z_1=H_1}=0, \frac{\partial\tilde{\varphi}_{1,n}}{\partial z_1}\Big|_{z_1=0}=\frac{\partial\tilde{\varphi}_{2,n}}{\partial z_2}\Big|_{z_2=H_2}; \quad \frac{\partial\tilde{\varphi}_{2,n}}{\partial z_2}\Big|_{z_2=0}=\frac{\partial\tilde{\varphi}_{3,n}}{\partial z_3}\Big|_{z_2=0} \quad (13)$$

$$\rho_1\left(P^2\tilde{\varphi}_{1,n}+g\frac{\partial\tilde{\varphi}_{1,n}}{\partial z_1}\right)\Big|_{z_1=0}=\rho_2\left(P^2\tilde{\varphi}_{2,n}+g\frac{\partial\tilde{\varphi}_{2,n}}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=H_2}, \quad (14)$$

$$\rho_2\left(P^2\tilde{\varphi}_{2,n}+g\frac{\partial\tilde{\varphi}_{2,n}}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=0}=\rho_3\left(P^2\tilde{\varphi}_{3,n}+g\frac{\partial\tilde{\varphi}_{3,n}}{\partial z_2}\right)\Big|_{z_2=0}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_{3,n}}{dz_2}\Big|_{z_2=-H_3}=0, \quad (15)$$

$$\tilde{\eta}_{1,n}=\frac{P}{(\rho_2-\rho_1)g}\left(\rho_1\tilde{\varphi}_{1,n}\Big|_{z_1=0}-\rho_2\tilde{\varphi}_{2,n}\Big|_{z_2=H_2}\right), \quad (16)$$

$$\tilde{\eta}_{2,n} = \frac{P}{(\rho_3-\rho_2)g}\left(\rho_2\,\tilde{\varphi}_{2,n}\Big|_{z_2=0} - \rho_3\,\tilde{\varphi}_{3,n}\Big|_{z_2=0}\right), \quad (17)$$

$$\lambda_n = \mu_n\frac{1}{R} \quad (18)$$

где P – параметр преобразования Лапласа, μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения:

$$J_0'(\mu) = -J_1(\mu) = 0, \quad (19)$$

J_0 и J_1 – цилиндрические функции Бесселя первого рода, нулевого и первого порядка соответственно.

Последовательность положительных корней трансцендентного уравнения (19) с высокой точностью задается следующей формулой:

$$\mu_n = 3{,}832+(n\text{-}1)\pi,\ n = 1,2,3,\ldots;\ \pi = 3{,}14159. \quad (20)$$

Знак «~» (тильда) над символом выражает прямое преобразование Лапласа. Натуральный индекс n выражает прямое конечное преобразование Бесселя.

В правой части дифференциального уравнения (11) содержатся определенные интегралы с бесконечно малыми интервалами интегрирования:

$$\int_0^a r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr \text{ и } \int_{R-\varepsilon}^R r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr. \quad (21)$$

Считая радиус трубы a малой величиной по сравнению с радиусом R, а также считая величину ε малой величиной по сравнению с радиусом R, можно заменить значения этих интегралов на соответствующие эквивалентные малые величины:

$$\int_0^a r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr \sim \frac{a}{2}J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right), \qquad \int_{R-\varepsilon}^R r\,J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr \sim RJ_0(\mu_n)\varepsilon\,. \quad (22)$$

С учетом приближенных эквивалентных формул (22) дифференциальное уравнение (11) перепишется в следующем виде:

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_{2,n}}{dz_2^2} - \lambda_n^2\tilde{\varphi}_{2,n} = -\frac{\tilde{q}Z(z_1)}{2\pi\varepsilon}J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right) + \frac{\tilde{q}J_0(\mu_n)}{2\pi H_2}, \quad (23)$$

Решения дифференциальных уравнений (10), (12) и (23), удовлетворяющие граничному условию свободной поверхности водоема при $z_1=H_1$, а также граничному условию на дне водоема при $z_2=-H_2$, имеют следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_{1,n}(z_1) = C_1 ch\lambda_n(z_1 - H_1), \quad 0 < z_1 < H_1, \quad (24)$$

$$\tilde{\varphi}_{2,n}(z_2) = C_2 sh\lambda_n z_2 + C_3 ch\lambda_n z_2 - \frac{\tilde{q}}{2\pi\lambda}J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\int_0^{z_2} Z(\xi)sh\lambda(z_2-\xi)d\xi + \frac{\tilde{q}}{2\pi H_2}J_0(\mu_n)\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0} sh\lambda(H_2-\xi)d\xi, \quad 0 < z_2 < H_2, \quad (25)$$

$$\tilde{\varphi}_{3,n}(z_2) = C_4 ch\lambda_n(z_2 + H_3), \quad -H_3 < z_2 < 0, \quad (26)$$

В процессе удовлетворения остальным граничным условиям на контактных поверхностях слоев получаем четкие линейные уравнения относительно переменных C_1, C_2, C_3 и C_4.

$$\begin{cases} sh\lambda_n H_1 C_1 + ch\lambda_n H_2 C_2 + sh\lambda_n H_2 C_3 = R_1 \\ C_2 = C_4 sh\lambda_n H_3 \\ S_1 C_1 - S_2 C_2 - S_3 C_3 = -(\rho_2 P^2 R_2 + \rho_2 g\lambda R_1) \\ S_3 C_2 - S_4 C_3 = 0 \end{cases}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &S_1 = \rho_1(P^2 ch\lambda H_1 - g\lambda_n sh\lambda H_1), \quad S_2 = \rho_2(P^2 sh\lambda_n H_2 + g\lambda ch\lambda_n H_2),\\ &S_3 = \rho_2(P^2 ch\lambda_n H_2 + g\lambda_n sh\lambda_n H_2), \quad S_4 = \rho_3 P^2 ch\lambda_n H_3 + (\rho_3-\rho_2)g\lambda sh\lambda_n H_3,\\ &R_1 = \frac{\tilde{q}}{2\pi\lambda_n}\rho_1 J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)ch\lambda_n(H_2 - z_0) - \frac{\tilde{q}J_0(\mu_n)}{2\pi H_2\lambda_n},\\ &R_2 = \frac{\tilde{q}}{2\pi\lambda_n}J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)sh\lambda_n(H_2 - z_0) - \frac{\tilde{q}J_0(\mu_n)}{2\pi H_2\lambda_n}, \end{aligned} \quad (28)$$

В выражении (25) определенный интеграл с бесконечно малым интервалом интегрирования заменен эквивалентным бесконечно малым значением:

$$\widetilde{\eta}_{1,n} = \frac{P}{(\rho_2-\rho_1)g}(\rho_1 C_1 ch\lambda H_1 - \rho_2(C_2 sh\lambda H_2 + C_3 ch\lambda H_2 - R_1)), \quad (29)$$

$$\widetilde{\eta}_{2,n} = \frac{P}{(\rho_3-\rho_2)g}(\rho_2 C_3 - \rho_3 C_4 ch\lambda H_3). \quad (30)$$

Выражения (16) и (17) через постоянные C_i перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\int_{z_0-\xi}^{z_0} sh\lambda(H_2-\xi)d\xi = sh\lambda(H_2-z_0)\varepsilon, \ при\ \varepsilon\to 0 \\ &\int_{z_0-\xi}^{z_0} ch\lambda(H_2-\xi)d\xi = ch\lambda(H_2-z_0)\varepsilon, \ при\ \varepsilon\to 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Вычислены значения постоянных C_i из системы уравнений (27) и подставлены в выражения (29) и (30). Затем выполнены обратные интегральные преобразования Лапласа и Бесселя. В результате всего этого получена совокупность расчетных формул для уравнений искривленных поверхностей раздела слоев у водозаборной трубы при r=0.

$$\eta_1(t) = -\frac{q}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)}\eta_{1,n}(t), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \eta_{1,n}(t) = -\frac{th\lambda_n H_1}{\gamma_{1,n}(\omega_{2,n}^2-\omega_{1,n}^2)}\Big\{\Big[&\rho_2^2 th\lambda_n H_3\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{sh\lambda_n z_0}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}\frac{ch\lambda_n H_2-1}{ch\lambda_n H_2}\right) + \rho_2\rho_3\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n z_0}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}th\lambda_n H_2\right)\Big]\phi_{1,n}(t) + g\lambda_n\rho_2(\rho_3-\rho_2)th\lambda_n H_3\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n z_0}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}th\lambda_n H_2\right)\phi_{2,n}(t)\Big\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\eta_2(t) = -\frac{q}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)}\eta_{2,n}(t), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2,n}(t) = \frac{th\lambda_n H_3}{\gamma_{1,n}(\omega_{2,n}^2-\omega_{1,n}^2)}\Big\{\Big[&\rho_2^2 th\lambda_n H_1\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{sh\lambda_n(H_2-z_0)}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}\frac{ch\lambda_n H_2-1}{ch\lambda_n H_2}\right) + \rho_1\rho_2\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n(H_2-z_0)}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}th\lambda_n H_2\right)\Big]\phi_{1,n}(t) - g\lambda_n\rho_2(\rho_2-\rho_1)th\lambda_n H_1\left(J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n(H_2-z_0)}{ch\lambda_n H_2} - \right. \\ &\left. -\frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n}th\lambda_n H_2\right)\phi_{2,n}(t)\Big\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1,n} &= \rho_1\rho_2 th\lambda_n H_3 + \rho_1\rho_3 th\lambda_n H_2 + \rho_2^2 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2 th\lambda_n H_3 + \rho_2\rho_3 th\lambda_n H_1 \\ \gamma_{2,n} &= -\rho_1\rho_2 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_3 + \rho_1(\rho_3-\rho_2)th\lambda_n H_2 th\lambda_n H_3 - \rho_1\rho_3 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2 + \\ &+\rho_2^2 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_3 + \rho_1(\rho_3-\rho_2)th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_3 + \rho_2\rho_3 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2 \\ \gamma_{3,n} &= (\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2 th\lambda_n H_3 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,n} &= \sqrt{g\lambda_n\frac{\gamma_{2,n}+\sqrt{\gamma_{2,n}^2-4\gamma_{1,n}\gamma_{3,n}}}{2\gamma_{1,n}}} \\ \omega_{2,n} &= \sqrt{g\lambda_n\frac{\gamma_{2,n}-\sqrt{\gamma_{2,n}^2-4\gamma_{1,n}\gamma_{3,n}}}{2\gamma_{1,n}}} \end{aligned} \quad (37)$$

Если водозаборная труба открывается мгновенно (быстро), то функции $\phi_{1,n}(t)$ и $\phi_{2,n}(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi_{1,n}(t) &= \omega_{2,n} sin\omega_{2,n}t - \omega_{1,n} sin\omega_{1,n}t \\ \phi_{2,n}(t) &= \frac{sin\omega_{2,n}t}{\omega_{2,n}} - \frac{sin\omega_{1,n}t}{\omega_{1,n}} \end{aligned} \quad (38)$$

Если водозаборная труба открывается медленно в течение промежутка времени t_0 по формуле:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \dfrac{t}{t_0}, \text{если } 0 < t < t_0 \\ q_0, \quad \text{если } t \geq t_0 \end{cases}$$

то функции $\phi_{1,n}(t)$ и $\phi_{2,n}(t)$ принимают следующий вид:

$$\phi_{1,n}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}\left(cos\omega_{1,n}t - cos\omega_{2,n}t\right), \text{если } 0 \leq t \leq t_0 \\ \dfrac{1}{t_0}\left(cos\omega_{1,n}t - cos\omega_{1,n}(t-t_0) - cos\omega_{2,n}t + cos\omega_{2,n}(t-t_0)\right), \quad \text{если } t > t_0 \end{cases}$$

$$\phi_{2,n}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}\left(\dfrac{1-cos\omega_{1,n}t}{\omega_{1,n}^2} - \dfrac{1-cos\omega_{2,n}t}{\omega_{2,n}^2}\right), \text{если } 0 \leq t \leq t_0 \\ \dfrac{1}{t_0}\left[\dfrac{cos\omega_{1,n}(t-t_0) - cos\omega_{1,n}t}{\omega_{1,n}^2} - \dfrac{cos\omega_{2,n}(t-t_0) - cos\omega_{2,n}t}{\omega_{2,n}^2}\right], \quad \text{если } t > t_0 \end{cases}$$

После вычисления функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ становится возможным составить формулу для вычисления критического расхода селективного отбора воды из промежуточного слоя водоема.

$$q_{кр} = min\left\{\frac{H_2 - z_0}{min\overline{\eta_1}(t)}; \frac{z_0}{max\overline{\eta_2}(t)}\right\}$$

где $\overline{\eta_1}(t)$ и $\overline{\eta_2}(t)$ – те же функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, но без коэффициента q_0.

Результаты исследования

Вышеизложенным способом поставлены и решены контактные начально-краевые задачи селективного отбора воды через трубу из двухслойного стратифицированного водоема. При заборе воды из верхнего слоя (рис. 3) для уравнения искривленной поверхности раздела слоев и, следовательно, для вычисления критического положения поверхности раздела слоев получается формула (32), в которой величина $\eta_{1,n}(t)$ определяется по формуле:

$$\eta_{1,n}(t) = -\frac{\rho_1 th\lambda_n H_2}{\gamma_{1,n}(\omega_{2,n}^2 - \omega_{1,n}^2)}\left\{\left[J_0\left(\mu_n \frac{a}{2R}\right)\frac{sh\lambda_n(H_1 - z_0)}{ch\lambda_n H_1} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{J_0(\mu_n)}{H_1\lambda_n}\frac{ch\lambda_n H_1 - 1}{ch\lambda_n H_1}\right]\phi_{1,n}(t) - g\lambda_n\left[J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n(H_1 - z_0)}{ch\lambda_n H_1} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{J_0(\mu_n)}{H_1\lambda_n} th\lambda_n H_1\right]\phi_{2,n}(t)\right\}$$

При заборе воды из нижнего слоя через трубу (рис. 3) для уравнения поверхности раздела слоев и, следовательно, для вычисления критического расхода и критического положения поверхности раздела слоев получается та же формула (34) при условии, что величина $\eta_{2,n}(t)$ определяется по формуле:

$$\eta_{2,n}(t) = -\frac{\rho_2\left[\phi_{1,n}(t) - g\lambda_n th\lambda_n H_1\phi_{2,n}(t)\right]}{\gamma_{1,n}(\omega_{2,n}^2 - \omega_{1,n}^2)} \cdot$$
$$\cdot\left[J_0\left(\mu_n\frac{a}{2R}\right)\frac{ch\lambda_n(H_2 - z_0)}{ch\lambda_n H_1} - \frac{J_0(\mu_n)}{H_2\lambda_n} th\lambda_n H_2\right]$$

Для этих двух задач формулы (36) упрощаются и приводятся к следующему виду:

$\gamma_{1,n} = \rho_2 + \rho_1 th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2$; $\gamma_{2,n} = \rho_2(th\lambda_n H_1 + th\lambda_n H_2)$;
$\gamma_{3,n} = (\rho_2 - \rho_1)th\lambda_n H_1 th\lambda_n H_2$.

Условие селективного отбора воды из верхнего слоя получится в следующем виде:

$$z_0 \geq max\ \overline{\eta_1}(t).$$

Условие селективного отбора воды из нижнего слоя получится в следующем виде:

$$z_0 \geq -min\ \eta_2(t).$$

Для критического расхода воды при отборе из верхнего и нижнего слоев получаются следующие формулы:

$$q_{1\,кр} = \frac{z_0}{max\ \overline{\eta_1}(t)}, q_{2\,кр} = \frac{z_0}{min\ \overline{\eta_2}(t)},$$

где $\overline{\eta_1}(t)$ и $\overline{\eta_2}(t)$ – те же функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, но без коэффициента q_0.

Выводы

В статье поставлена и решена пространственная начально-краевая задача, моделирующая селективный способ отбора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема, когда вода отбирается из его внутреннего пространства. Вода забирается трубой, опущенной через свободную поверхность внутрь промежуточного слоя. Задача решена аналитическими методами математической физики. Получена совокупность расчетных формул для вычисления критических положений поверхностей раздела слоев, а также для вычисления критического расхода забираемой воды через водозаборные трубы. Расчет и проектирование селективных водозаборных устройств на основе, полученной в статье совокупности формул, всегда будет гарантировать селективный отбор воды из промежуточного слоя, где вода бывает на 8–10 °С холоднее, чем в поверхностном слое, и содержит меньше наносов, чем нижний слой водоема. Отобранная вода предназначена для охлаждения и отвода избыточного тепла от высокотемпературных тепловыделяющих устройств промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций.

Литература

1. Аверкиев А.Г., Макаров И.И., Синотин В.И. Бесплотинные водозаборные сооружения. – М.: Л.: Энергия, 1969. – 164 с.

2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидродинамика. – М.: Недра, 1993. – 408 с.

3. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. – Новосибирск: Наука, 1991. – 176 с.

4. Букреев В.И. Способ управления селективным водозабором через отверстие в вертикальной стенке // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51. № 3. – С. 49–54.

5. Вазов В.В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Перевод с английского. – М.: Изд. иностранной литературы, 1963. – 483 с.

6. Гавич И.К. Гидро-Геодинамика. – М.: Недра, 1988. – 246 с.

7. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. – Л.: Изд. Ленинградского университета, 1970. – 378 с.

8. Заалишвили В.Б., Мельков Д.А., Фидарова М.И., Харебов К.С. К вопросу пересчета сейсмической интенсивности шкалы Японского метеорологического агентства (JMA) в макросейсмическую шкалу MSK // Геология и геофизика Юга России. – 2024. – Т. 14. № 1. – С. 19–35. DOI: 10.46698/VNC.2024. 82.41.002.

9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 830 с.

10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

11. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.

12. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.: Л.: Гостехиздат, 1953. – 607 с.

13. Методические указания по технологическим расчетам водоемов-охладителей. / Исполнители А.С. Соколов, И.И. Макаров, В.И. Кравец, З.Р. Филиппова. – СПб.: ВНИИГ, 2003. – 116 с.

14. Музаев И.Д. Математическое моделирование селективных водозаборных процессов в двухслойном стратифицированном водоеме // Геология и геофизика Юга России. – 2024. – Т. 14. № 3. – С. 29–40. DOI: 10.46698/y4376-5315-2395-x.

15. Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование одного эффективного способа забора воды из определенного слоя двухслойного стратифицированного водоема // Вычислительные технологии. – 2020. – Т. 25. № 5. – С. 4–16.

16. Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование одного эффективного способа забора воды из определенного слоя двухслойного стратифицированного водоема // Геология и геофизика Юга России. – 2025. – Т. 15. № 2. – С. 21–32. DOI: 10.46698/VNC.2025.68.22.002.

17. Справочник по гидравлике / под ред. В.А.Большакова. – Киев: Вища Школа, 1977. – С. 223–225.

18. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 815 с.

19. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Недра, 1968. – 299 с.

20. Шокин Ю.И., Рычков А.Д., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. О численных методах решения задач наката волн на берег // Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20. № 5. – С. 214–232.

21. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. – М.: Колос, 2004. – 480 с.

22. Craya A. Recherches theorignes sur lecoulement de couches superposes de fluides de densites defferents // La Houille Blanche. – 1949. – Vol. 35. Issue 1. – pp. 44–55. DOI: 10.1051/lhb/1949017.

23. Garabedian P.R. The mathematical theory of three-dimensional cavities and jets // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1956. – Vol. 62. Issue 3. – pp. 219–235.

24. Harleman D.R.F., Stolzenbach K.D. Fluid mechanics of heat disposal from power generation // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1972. – Vol. 4. – pp. 7–32.

25. Karplus W.J. Water coning before breakthrough an electronic analog treatment // Petroleum Trans. Society. – 1956. – Vol. 207. Art. No. 240.

References

1. Averkiev A.G., Makarov I.I., Sinotin V.I. Damless water intake structures. Moscow. Leningrad. Energiya. 1969. 164 p. (In Russ.)

2. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. Underground hydrodynamics. Moscow. Nedra. 1993. 408 p. (In Russ.)

3. Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu., Shokin Yu.I. Mathematical modelling of stratified fluid flows. Novosibirsk. Nauka. 1991. 176 p. (In Russ.)

4. Bukreev V.I. A method for controlling selective water intake through a hole in a vertical wall. Applied Mechanics and Technical Physics. 2010. Vol. 51. No. 3. pp. 49–54. (In Russ.)

5. Vazov V.V., Forsyth J. Difference methods for solving partial differential equations. Translation from English. Moscow. Publishing house Foreign Literature. 1963. 483 p. (In Russ.)

6. Gavich I.K. Hydro-Geodynamics. Moscow. Nedra. 1988. 246 p. (In Russ.)

7. Ginzburg I.P. The theory of resistance and heat transfer. Leningrad. Leningrad University Publishing House. 1970. 378 p. (In Russ.)

8. Zaalishvili V.B., Melkov D.A., Fidarova M.I., Kharebov K.S. On the issue of converting the seismic intensity of the Japan Meteorological Agency (JMA) scale into the MSK macroseismic scale. Geology and Geophysics of Russian South. 2024. Vol. 14. No. 1. pp. 19–35. DOI: 10.46698/VNC.2024.82.41.002. (In Russ.)

9. Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. Moscow. Nauka. 1977. 830 p. (In Russ.)

10. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equation in mathematical physics. Moscow. Vysshaya Shkola. 1970. 710 p. (In Russ.)

11. Lamb G. Hydrodynamics. Moscow. Leningrad. Gostekhizdat. 1947. 928 p. (In Russ.)

12. Masket M. Physical bases of oil production technology. Moscow. Leningrad. Gostekhizdat. 1953. 607 p. (In Russ.)

13. Methodological guidelines for technological calculations of cooling ponds. Eds. A.S. Sokolov, I.I. Makarov, V.I. Kravets, Z.R. Filippova. Saint Petersburg. VNIIG. 2003. 116 p. (In Russ.)

14. Muzaev I.D. Mathematical modeling of selective water intake processes in a two-layer stratified reservoir. Geology and Geophysics of Russian South. 2024. Vol. 14. No. 3. pp. 29–40. DOI: 10.46698/y4376-5315-2395-x. (In Russ.)

15. Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Mathematical modeling of an efficient method for water intake from a specific layer of a two-layer stratified reservoir. Computational Technologies. 2020. Vol. 25. No. 5. pp. 4–16. (In Russ.)

16. Muzaev I.D., Kharebov K.S., Muzaev N.I. Mathematical modeling of one effective method of water intake from a certain layer of a two-layered stratified reservoir. Geology and Geophysics of Russian South. 2025. Vol. 15. No. 2. pp. 21–32. DOI: 10.46698/VNC.2025.68.22.002. (In Russ.)

17. Reference book on hydraulics. Ed. V.A. Bolshakov. Kiev. Vyshcha Shkola. 1977. pp. 223–225. (In Russ.)

18. Sretenski L.N. Theory of wave motions of a fluid. Moscow. Nauka. 1977. 815 p. (In Russ.)

19. Charny I.A. Underground hydro-gasdynamics. Moscow. Nedra. 1968. 299 p. (In Russ.)

20. Shokin Yu.I., Rychkov A.D., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B. On numerical methods for solving problems of wave runup on the shore. Computational Technologies. 2015. Vol. 20. No. 5. pp. 214–232. (In Russ.)

21. Shterenlicht D.V. Hydraulics. Moscow. Kolos. 2004. 480 p. (In Russ.)

22. Craya A. Recherches theorignes sur lecoulement de couches superposes de fluides de densites defferents. La Houille Blanche. 1949. Vol. 35. Issue 1. pp. 44–55. DOI: 10.1051/lhb/1949017.

23. Garabedian P.R. The mathematical theory of three-dimensional cavities and jets. Bulletin of the American Mathematical Society. 1956. Vol. 62. Issue 3. pp. 219–235.

24. Harleman D.R.F., Stolzenbach K.D. Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 4. pp. 7–32.

25. Karplus W.J. Water coning before breakthrough an electronic analog treatment. Petroleum Trans. Society. 1956. Vol. 207. Art. No. 240.