

УДК 539.3:550.343

DOI: 10.46698/VNC.2025.96.62.001

Оригинальная статья

К задачам теории «вирусов» вибропрочности в сейсмологии

И.С. Телятников^{1,2}, А.В. Павлова²

¹ Южный научный центр РАН, Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону,
пр. Чехова, 41, e-mail: ilux_t@lisl.ru;

² Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар,
ул. Ставропольская, 149

Статья поступила: 25.03.2025, доработана: 30.05.2025, принята к публикации: 04.06.2025

Резюме: Актуальность работы. Задачи теории упругости и математической физики для тел с разрезами нулевой толщины вызывают интерес в связи с многочисленными приложениями, в том числе в геофизике и сейсмологии. Круг геофизических задач, решаемых с использованием математических моделей деформируемых сред, содержащих дефекты типа трещин, очень широк. В сейсморазведке применение таких моделей позволяет учитывать наличие неоднородностей, что дает возможность повысить точность интерпретации натурных экспериментов. Интенсивно развиваемые методы моделирования динамических процессов в системах, включающих основания с расслоениями, находят применение при решении актуальных проблем виброзондирования слоистых геологических пород, нефтедобычи и пр. При этом решение прямых задач расчета волновых полей, возбуждаемых внутренними источниками в деформируемой среде, является неизбежным этапом решения задач обнаружения и идентификации скрытых неоднородностей. **Цель работы** – развитие полуаналитических методов решения задач для слоистых структур, содержащих внутренние трещины. **Методы исследования.** В качестве уравнений движения сплошной среды приняты уравнения Ламе в перемещениях, поставлена граничная задача с разрывными граничными условиями в области дефектов. Метод блочного элемента использован для построения порождаемой задачей системы интегральных уравнений, для решения последних использован метод фиктивного поглощения. **Результаты работы.** Представлен полуаналитический метод исследования вызывающих особый интерес локализационных и резонансных эффектов, связанных со спектральными свойствами задач для слоистых структур с трещинами.

Ключевые слова: моделирование геологической среды, слоистая структура, планарные трещины, метод блочного элемента, система интегральных уравнений, метод фиктивного поглощения, условия локализации.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда в рамках проекта № 24-21-20032.

Для цитирования: Телятников И.С., Павлова А.В. К задачам теории «вирусов» вибропрочности в сейсмологии. *Геология и геофизика Юга России*. 2025. 15(2): 116-127. DOI: 10.46698/VNC.2025.96.62.001

DOI: 10.46698/VNC.2025.96.62.001

Original paper

On the problems of the theory of vibration-strength “viruses” in seismology

I.S. Telyatnikov^{1,2}, A.V. Pavlova²

¹ Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, 41 Chekhov Ave., Rostov-on-Don 344006, Russian Federation, e-mail: ilux_t@lisl.ru;

² Kuban State University, 149 Stavropolskaya Str., Krasnodar 350040, Russian Federation

Received: 25.03.2025, revised: 30.05.2025, accepted: 04.06.2025

Abstract: Relevance. The problems of elasticity theory and mathematical physics for bodies with zero-thickness cuts present a great interest and have numerous applications, including those in geophysics and seismology. The spectrum of geophysical problems solved using mathematical models of deformable media containing defects such as cracks is very broad. In seismic exploration, the use of such models allows us to take into account the presence of heterogeneities, which makes it possible to increase the accuracy of the field experiments interpretation. Intensively developed methods for modeling dynamic processes in systems including foundations with discontinuities are used to solve topical problems in vibration sounding of layered geological formations, oil extraction, etc. At the same time, the solution of direct problems of calculating wave fields excited by internal sources in a deformable medium is an inevitable stage in solving problems of detecting and identifying hidden inhomogeneities. **Aim.** The aim of the work is to develop semi-analytical methods for solving problems for layered structures containing internal cracks. **Methods.** As equations for motion of a continuous medium we have adopted Lamé equations in displacements and formulated boundary problem with discontinuous boundary conditions in the defect area. The block element method has been used to construct the system of integral equations for the problem, and the fictitious absorption method has been used to solve the latter. **Results.** A semi-analytical method is presented for studying localization and resonance effects of particular interest, associated with the spectral properties of problems for layered structures with cracks.

Keywords: modeling of geological environment, layered structure, planar cracks, block element method, system of integral equations, fictitious absorption method, localization conditions.

Acknowledgment: This work was financially supported by the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation under project No. 24-21-20032.

For citation: Telyatnikov I.S., Pavlova A.V. On the problems of the theory of vibration-strength “viruses” in seismology. *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Russian South*. (in Russ.). 2025. 15(2): 116-127. DOI: 10.46698/VNC.2025.96.62.001

Введение

Активное использование инструментальных методов управляемой активной сейсмологии, направленных на изучение внутренней структуры Земли, ставит немало задач, решение которых требует развития механико-математических моделей и совершенствования методов их исследования [Изменение ..., 2008]. Для Северного Кавказа, являющегося одним из наиболее сейсмоопасных регионов России [Стогний и др., 2022], эти проблемы особенно актуальны.

При моделировании геологической среды широкое распространение получила модель слоистого упругого полупространства с плоскопараллельными границами

или пакета слоев [Собисевич и др., 2020]. Сопоставление результатов использования этой модели с данными мониторинга позволяет получать и интерпретировать сведения о процессах возбуждения и распространения сейсмических волн в результате воздействий поверхностных и заглубленных источников различной природы. Поэтому исследование взаимодействия упругих волн с границами раздела в многослойных средах и влияние границ на их поведение находит широкое применение в геофизике и сейсмологии. При этом часто используется классическое граничное условие идеального (жесткого) соединения для поверхности раздела, характеризующееся непрерывностью перемещений и напряжений на границах раздела.

Кроме того, распространенные в реальной среде полости, трещины и другие неоднородности различного размера и природы активно развиваются в литосфере сейсмоопасных регионов, меняя пространственную картину формируемых волновых полей и влияя на локальные и глобальные резонансные свойства отдельных образований горной породы. С такими дефектами нередко связывают крупные сейсмические события, являющиеся источниками геофизических катастроф [Собисевич и др., 2020]. В настоящее время исследованию различных аспектов динамики сред, содержащих трещины, посвящено большое количество работ как зарубежных, так и отечественных авторов, демонстрирующих разнообразные подходы [Бабешко, 2000; Komatitsch, Tromp, 1999; Ceeseman, Santare, 2002; Ватульян, Баранов, 2005; Кардовский и др., 2004; Пряхина, Смирнова, 2005; Shifrin, 2015; Глушков и др., 2006; Собисевич, 2010; Стогний и др., 2020].

Одна из часто применяемых математических моделей трещины – математический разрез. Для трещины нулевой толщины используют различные граничные условия на ее берегах: раскрытая трещина, трещина с заданными на берегах напряжениями, трещины с равномерно и неравномерно распределенными внутренними связями.

В работах В.А. Бабешко проведена систематизация различных типов неоднородностей и сформулированы положения теории «вирусов» вибропрочности. Для дефектов типа трещин, одиночных и множественных, расположенных в параллельных плоскостях, в работах [Бабешко, 2000; Кардовский и др., 2004; Пряхина, Смирнова, 2005; Telyatnikov, Pavlova, 2023] представлены методы исследования задач в рамках указанной теории. Получение решения интегральных уравнений в полуаналитической форме сокращает вычислительные затраты.

Внутренние неоднородности могут приводить к перераспределению напряжений и деформаций в массиве и земной коре [Заалишвили, Голик, 2024]. А влияние на геологическую среду различных видов вибраций, в том числе техногенных, может приводить к возникновению возбужденной сейсмичности [Изменение ..., 2008].

В работе рассматриваются задачи об установившихся колебаниях слоистой структурированных сред, содержащих планарные трещины, результаты исследования которых могут быть использованы при моделировании воздействий на геологическую среду широко распространенных длительных вибраций.

Исследование направлено на изучение закономерностей вибрации трещин и развитие методов решения задач, описывающих эти процессы. Особый интерес вызывает изучение локализационных и резонансных эффектов, связанных со спектральными свойствами задач для слоистых структур с трещинами. В работе продемонстрирован подход к решению задач для слоистых структур с планарными

трещинами на основе теории «вирусов» вибропрочности и применения факторизационных методов.

Общая постановка задачи

Слоистость – один из признаков, свойственных осадочным и метаморфическим комплексам горных пород. Геологическое строение среды в сейсмически активных областях нередко представлено сложными многослойными разрезами, но в тех случаях, когда геологический разрез местности относительно прост в смысле геометрии напластования пород и рельефа местности, модель верхней части земной коры можно представить в виде системы плоскопараллельных горизонтальных слоев. Изучаемая краевая задача для пакета из N слоев с защемленной нижней гранью описывается уравнениями Ламе относительно перемещений. В декартовой системе координат плоскость x_1Ox_2 параллельна поверхности пакета ($x_3 = h_{N+1} \geq 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty$), ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. Упругие характеристики слоев, ограниченных плоскостями $x_3 = h_k, x_3 = h_{k+1}$ ($k = \overline{1, N}$), обозначены через λ_k, μ_k , плотность – ρ_k . Время входит в формулировку задачи в качестве параметра. Для установившихся гармонических колебаний принята комплексная форма записи и все функции представимы в виде:

$$f(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\tilde{f}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}], \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),$$

и далее изложение проводится для амплитудных параметров, тильда опущена. Определяющие уравнения имеют вид:

$$(\lambda_j + \mu_j)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}_j) + \mu_j\Delta\mathbf{u}_j = -\omega^2\rho_j\mathbf{u}_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь для перемещений при $x_3 \rightarrow h_k \pm 0$ введены обозначения $\mathbf{u}_k^\pm = \{\mathbf{u}_{km}^\pm\}$, $m = \overline{1, 3}$, для векторов напряжений – $\boldsymbol{\tau}_k^\pm = \{\tau_{km}^\pm\}$, $\boldsymbol{\tau}_k(x_1, x_2, h_k) = \{\sigma_{ij}n_j\}|_{x_3=h_k}$, где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, n_j – составляющие вектора нормали к площадке.

Будем полагать, что на поверхности среды в заданной конечной области Ω_{N+1} действует гармонический источник, в интерфейсных плоскостях содержатся плоские трещины, занимающие непересекающиеся односвязные области Ω_{jk} , $j = \overline{1, N_k}$. Наличие трещин и расслоений при использовании модели слоистой протяженной среды описывается заданием в области дефектов разрывного условия для перемещений, вне областей дефектов задается абсолютный контакт слоев (непрерывность полей напряжений и перемещений).

Граничные условия запишутся в форме:

$$\hat{x}_3 = h_{N+1}: \mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_{N+1}^0, (x_1, x_2) \in \hat{\Omega}_{N+1}; \boldsymbol{\tau}_{N+1} = \mathbf{0}, (x_1, x_2) \notin \Omega_{N+1}; \quad (2)$$

$$x_3 = h_1: \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, -\infty < x_1, x_2 < +\infty; \quad (3)$$

$$x_3 = h_k: \boldsymbol{\tau}_{jk} = \boldsymbol{\tau}_{jk}^+ = \boldsymbol{\tau}_{jk}^-, (x_1, x_2) \in \Omega_{jk};$$

$$\mathbf{u}_{jk}^* = \mathbf{u}_{jk}^+ - \mathbf{u}_{jk}^- = \mathbf{0}, (x_1, x_2) \notin \bigcup_{j=1}^{N_k} \Omega_{jk}, j = \overline{1, N_k}. \quad (4)$$

Во избежание неоднозначности решения задачи об установившихся колебаниях в качестве условия излучения выбирается принцип предельного поглощения [Ворович, Бабешко, 1979].

Воспользуемся методом блочного элемента (МБЭ) [Babeshko et al., 2013], выделив в пакете слои-блоки. В результате реализации алгоритма МБЭ для задачи (1)–(4) приходим к системе интегральных уравнений (СИУ) в плоскостях раздела слоев:

$$\sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N_l} \mathcal{K}_{nl}(\Omega_{jl+1}) \mathbf{u}_{jl+1}^* + \mathcal{K}_{nN}(\Omega_{N+1}) \boldsymbol{\tau}_{N+1} = \boldsymbol{\tau}_{mn+1}, \quad (5)$$

$$x_3 = h_{n+1}, (x_1, x_2) \in \Omega_{mn+1}, m = \overline{1, N}, n = \overline{1, N-1};$$

$$\sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N_l} \mathcal{K}_{Nl}(\Omega_{jl+1}) \mathbf{u}_{jl+1}^* + \mathcal{K}_{NN}(\Omega_{N+1}) \boldsymbol{\tau}_{N+1} = \mathbf{u}_{N+1}^0, \quad (6)$$

$$x_3 = h_{N+1}, (x_1, x_2) \in \Omega_{N+1}.$$

Неизвестными в (5), (6) являются скачки перемещений в областях трещин $\mathbf{u}_{jl+1}^*$ и напряжения под штампом на поверхности $\boldsymbol{\tau}_{N+1}$. Интегральные операторы имеют вид:

$$\mathcal{K}_{nl}(\Omega_{jl+1}) \mathbf{u}_{jl+1}^* = \iint_{\Omega_{jl+1}} \mathbf{k}_{nl}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \mathbf{u}_{jl+1}^*(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где ядра зависят от частоты и параметров системы и представляются

$$\mathbf{k}_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Положение контуров Γ_1, Γ_2 в комплексной плоскости определяется принципом предельного поглощения [Ворович, Бабешко, 1979], структура матриц $\mathbf{K}_{ij}$ приведена в работе [Pavlova, Telyatnikov, 2019].

Методы построения символов и матриц-символов интегральных уравнений (ИУ) и СИУ задач для сред с единичными и множественными трещинами и их решения рассмотрены также в работах [Ткачев, 1979; Кардовский и др., 2004; Пряхина, Смирнова, 2005; Собисевич, 2010; Pavlova, Telyatnikov, 2019; Telyatnikov, Pavlova, 2023]. При решении трехмерных задач о колебаниях структур с трещинами зачастую используют метод граничных интегральных уравнений, где для отыскания скачка перемещений применяется метод Галеркина [Глушков, Глушкова, 1996; Bostrom, 2003].

Особенностью ИУ, возникающих при моделировании среды, содержащей трещины, является растущий характер символов ядер на бесконечности, вследствие чего ядра представляются обобщенными функциями. В работе [Ткачев, 1979] регуляризация систем интегральных уравнений первого рода проведена с помощью факторизации функций и матриц-функций, авторами [Пряхина, Смирнова, 2005; Telyatnikov, Pavlova, 2023] использован метод фиктивного поглощения (МФП), описанный в монографии [Бабешко, 1984]. Следуя примененному в работах В.А. Бабешко приему, осуществляется преобразование интегральных операторов за счет выноса дифференциального оператора $\Delta - \Lambda^2, \Lambda = \text{const}$, и формулировки дополнительных условий для устранения неопределенности в решении исходных ИУ. В качестве дополнительных ограничений, накладываемых на решения, принимаются условия равенства нулю скачков перемещений на границах областей, занятых трещинами. Для СИУ с преобразованным оператором может быть применен метод фиктивного поглощения (МФП), различные модификации которого описаны в работах [Кардовский и др., 2004; Пряхина, Смирнова, 2005; Telyatnikov, Pavlova, 2023].

Представим матрицу-символ ядра СИУ $\mathbf{K} = \|\mathbf{K}_{ij}\|$

$$\mathcal{K}(\Omega) \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (7)$$

в виде $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \mathbf{\Pi}$, $\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2) \approx \mathbf{E} + \mathbf{O}(\alpha^{-1})$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{K}_0$ соответствует задачам для сред с затуханием. Асимптотические свойства элементов и определителей $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_0$ совпадают при $\alpha \rightarrow 0$, отличием для $\mathbf{K}_0$ является отсутствие

особенностей на вещественной оси [Ворович, Бабешко, 1979]. На вещественных осях построим аппроксимации элементов матриц $\Pi(\alpha_1, \alpha_2)$, $\Pi^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ рациональными функциями, $\Pi^{\pm 1}(\alpha_1, \alpha_2) \approx \Pi_*^{\pm 1}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\Pi_* = \|P_{ij}\|$, $\Pi_*^{-1} = \|M_{ij}\|$, обозначив D_{ij} и Z_{ij} полярные множества P_{ij} и M_{ij} соответственно. Используя теорему теории возмущений [Бабешко, 1984], для построения приближенного решения (7) будем рассматривать СИУ:

$$\mathcal{K}^*(\Omega)q = f, K^* = K_0\Pi^*.$$

Далее символ «*» опущен.

Алгоритм МФП предполагает представление решения в виде $q(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2)$, где $V_2\varphi = V_2q$. Здесь и далее использованы обозначения $V_n^{\pm 1}$ для операторов прямого и обратного преобразования Фурье порядка n . Тогда $V_2(\alpha_1, \alpha_2)q_k = 0$ на множествах D_{jk} .

Используя по схеме метода новую неизвестную $t(x_1, x_2) = V^{-1}\Pi V p(x_1, x_2)$, для нее получим:

$$t(x_1, x_2) = \mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi,$$

где матрица-символ ядра оператора S имеет вид $K_0(\Pi - E)$.

Тогда решение (7) получим в следующем виде:

$$q(x_1, x_2) = \mathcal{K}_0^{-1}f - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi + V^{-1}(\Pi^{-1} - E)V(\mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi).$$

Из совпадения носителей вектор-функций $p(x_1, x_2)$ и $t(x_1, x_2)$ вытекает условие [Бабешко, 1984]:

$$V(\mathcal{K}_0^{-1}f - \varphi - \mathcal{K}_0^{-1}S\varphi) = 0, (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_{ij}. \quad (8)$$

Решение интегрального уравнения для одиночной трещины

Встречаются случаи, когда в колебательном процессе, в который вовлечены большие объемы горной породы, предпочтение должно быть отдано локальным структурам, формирующим источники возмущений [Собисевич и др., 2020]. Большое число работ посвящено численному решению задач для деформируемых структур с одиночной трещиной. В рассматриваемых в данной работе моделях не учитывается возможность контакта берегов трещины. Подходы, основанные на модели контактной зоны [England, 1965], преодолевают проблему взаимопроникновения берегов трещины, однако зона взаимопроникновения обычно мала по сравнению с длиной трещины [Erdogan, 1963].

Приведем ИУ осесимметричной задачи для одного слоя-блока, содержащего трещину отрыва в плоскости, параллельной границам:

$$\mathcal{K}q = \int_0^a k_n(r, \rho) u^*(\rho) \rho d\rho = f(r), 0 \leq r \leq a, r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$k_n(r, \rho) = \int_{\Gamma_0} K(\alpha) J_n(\alpha r) J_n(\alpha \rho) \alpha d\alpha, \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,$$

где $K(\alpha) \sim C\alpha(1 + O(\alpha^{-1}))$, $C = \text{const}$, при $\alpha \rightarrow \infty$. Контур Γ_0 представляет собой часть контура Γ , лежащую в правой полуплоскости, J_n – функция Бесселя первого рода [Справочник ..., 1979].

Для получения ИУ с убывающим символом ядра вынесем из обеих частей оператор вида $-L_n + \Lambda^2$, где $L_n = -\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}\right)$. В результате получим:

$$\int_0^a k_1(r, \rho) u^*(\rho) \rho d\rho = \int_0^a f(\rho) \rho \int_0^\infty \frac{J_n(\alpha r) J_n(\alpha \rho)}{\alpha^2 + \Lambda^2} \alpha d\alpha d\rho + \varepsilon(r),$$

$$\varepsilon(r) = C_1 I_n(\Lambda r) + C_2 K_n(\Lambda r), \quad (9)$$

где I_n – функция Инфельда, K_n – функция Макдональда.

В силу неограниченности функции Макдональда [Справочник ..., 1979] при $r = 0$, следует положить $C_2 = 0$. Тогда ИУ (9) запишется в виде:

$$\int_0^a k_1(r, \rho) u^*(\rho) \rho d\rho = K_n(\Lambda r) \int_0^r f(\rho) I_n(\Lambda \rho) \rho d\rho +$$

$$+ I_n(\Lambda r) [C_1 + \int_r^a f(\rho) K_n(\Lambda \rho) \rho d\rho],$$

где C_1 подлежит определению из условия равенства нулю раскрытия трещины на краю (при $r = a$).

Последнее ИУ, не нарушая общности, решается для $f(r) = J_n(\eta r)$, так как произвольную функцию можно представить в виде разложения в ряд по функциям Бесселя.

В работе [Telyatnikov, Pavlova, 2023] предложен следующий вид функций φ :

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N G_k(L_n) D_k \delta(r - a),$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \cdots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \cdots (\alpha^2 - p_N^2),$$

где p_k составляют полярное множество $K(\alpha)$, D_k – постоянные, определяемые впоследствии из условия (8).

Обсуждение результатов

Наличие в деформируемой среде неоднородностей при некоторых условиях приводит к локализации волнового процесса и возникновению резонансов в условиях вибрации, этот эффект может наблюдаться как для множественных отслоений, так и для одиночной трещины. Но присутствие системы трещин усложняет обнаружение таких дефектов: если одиночная трещина, как правило, экспериментально поддается локации, то совокупность дефектов может сильно рассеивать падающий сигнал.

Условия локализации обусловлены наличием у оператора соответствующей краевой задачи определенных спектральных свойств и сформулированы в виде теорем в работе [Бабешко, 2000].

Теорема [Бабешко, 2000]: Пусть для заданного вируса параметры задачи таковы, что имеет место равенство:

$$Q_0(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \text{ при } \alpha = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2} = z_k, k = 1, \dots, m, \quad (10)$$

тогда «вирус» локализует волновой процесс в своей окрестности.

Здесь z_k образуют корневое множество $\det K(\alpha_1, \alpha_2, \omega)$; вектор-функция $Q_0(\alpha_1, \alpha_2)$ – решение СИУ, которую можно получить из (5), (6) путем замены матрицы Фурье символа ядра на вариант задачи для среды с сильным затуханием K_0 .

Развивая теоретические построения в рамках затронутой проблемы, построение условий (10) требует определения корневого множества $\det K$. Используя символы $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ блочной матрицы K описанной задачи для пакета слоев с фиксированной нижней гранью и действующим на поверхности штампом, можно получить аналитические представления $\det K$. Корневое множество $\det K$ включает полярные множества определителей матриц-символов Грина однородных слоев с параметрами первого и последнего слоев с условием (3) на нижней границе и полярные множе-

ства определителей матриц-символов Грина однородных слоев со свободной верхней границей с характеристиками внутренних слоев, что полностью согласуется с результатами, полученными в работах [Пряхина, Смирнова, 2006, 2012].

На рисунке 1 представлены кривые полюсов и нулей элементов и определителей матриц для задачи о колебаниях среды с трещинами в интерфейсных плоскостях. Так рисунок 1а иллюстрирует нули и полюса элемента $K_{33}(\alpha)$ в случае одиночной трещины в интерфейсной плоскости двухслойного пакета, рисунку 1б соответствует трехслойный пакет с трещиной между вторым и третьим слоями (коэффициенты Пуассона $\nu_j = 0,28, j = \overline{1,3}$). Толщины слоев приведены в безразмерных величинах (для обоих случаев $H_1 = H_2 = 0,5, H_3 = 1$), нижняя граница пакета защемлена, верхняя – свободна от нагрузок. На рисунке 1с приведены нули и полюса определителя матрицы $\mathbf{K}$ пакета из двух слоев со свободной поверхностью и интерфейсной трещиной ($H_1 = H_2 = 0,5, H_3 = 1$), а на 1d – определителя матрицы $\mathbf{K}$ для четырехслойной среды, с нагруженной верхней гранью ($H_1 = H_4 = 0,5, H_2 = H_3 = 0,2$). Трещины в пакете расположены между первым и вторым, а также между третьим и четвертым слоями.

Всюду на графиках черными сплошными линиями обозначены полюса, а пунктиром – нули (синим – однократные, красным – двукратные). По оси абсцисс отложена приведенная частота колебаний $\bar{\omega} = \omega l \sqrt{\frac{\rho_N}{\mu_N}}$ (ω – частота колебаний, l – размерный линейный параметр, ρ_N, μ_N – плотность и модуль сдвига верхнего слоя), по оси ординат – параметр преобразования Фурье.

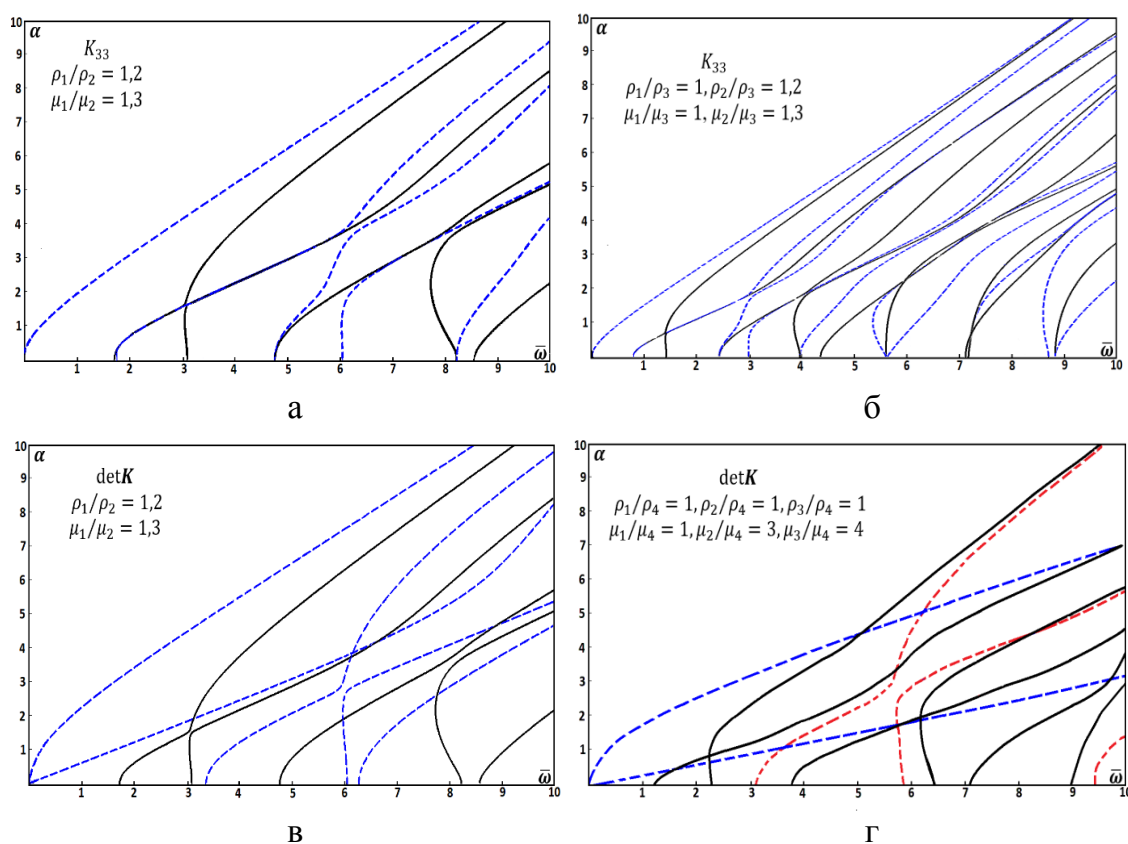


Рис. 1. Нули и полюса элементов и определителей матриц-символов /

Fig. 1. Zeros and poles of elements and determinants of matrix symbols

В работе [Собисевич, 2010] рассматривалась задача об установившихся колебаниях точек упругого однородного полупространства в случае, когда сейсмогравитационный процесс формируется вибрацией берегов круглой в плане трещины, рассчитаны дисперсионные характеристики для различных параметров среды.

Описанный в настоящей работе подход позволяет на основе рассчитанных нулей и полюсов для слоистых сред найти скачки перемещений на берегах трещин как решения СИУ. На рисунке 2 приведены вещественные части комплексных амплитуд раскрытия круглой интерфейсной трещины в двухслойном пакете ($H_1 = 0,6, H_2 = 0,4, \nu_j = 0,3$ ($j = 1,2$), $\mu_1/\mu_2 = 0,5, a = 2, \rho_1/\rho_2 = 1, \bar{\omega} = 4$) для $f(r) = J_0(\eta r)$ при разных значениях параметра η .

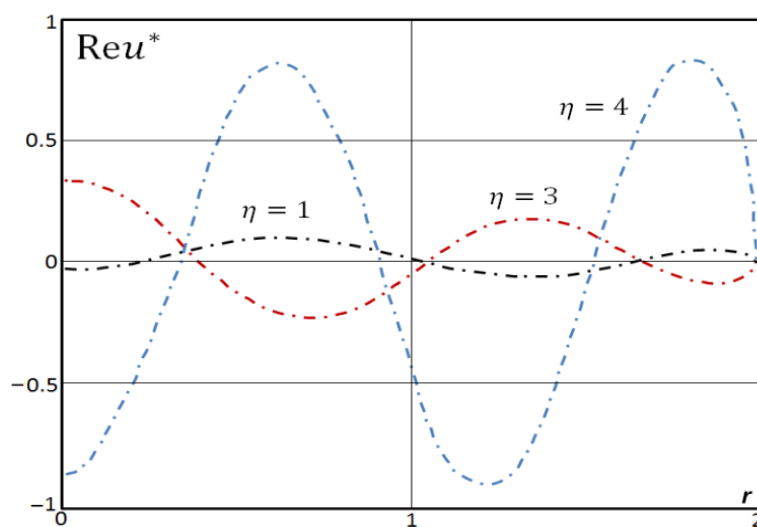


Рис. 2. Вещественная часть скачка перемещений на берегах круглой трещины /

Fig. 2. The real part of the jump in displacements on the banks of a circular crack

Выводы

В настоящее время активно развиваются новые вибрационные геотехнологии, требующие теоретического обоснования на основе методов математического моделирования. В работе исследованы механико-математические модели геологических материалов, описывающие упругие колебания слоистых структур с планарными трещинами.

Ключевым вопросом в исследовании задач для слоистых оснований с нарушениями сплошности межслойного контакта является построение и решение порождаемых ими интегральных уравнений и систем интегральных уравнений. Используемый в работе алгоритм построения СИУ смешанных задач основан на формализме МБЭ.

Предложенные подходы дают возможность изучить процессы вибрации слоистых структур, генерируемых осциллирующими нагрузками на поверхности и внутренних неоднородностях для различных физико-механических и геометрических характеристик составляющих их слоев-блоков.

Литература

1. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. – 265 с.

2. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и трещин). // Известия РАН. МТТ. – 2000. – Т. 373. № 3. – С. 5–9.
3. Ватульян А.О., Баранов И.В. Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде. // Акустический журнал. – 2005. – Т. 51. № 4. – С. 456–462.
4. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы. // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60. № 2. – С. 282–289.
6. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование и локализация энергии в упругих слоистых волноводах с дефектами. // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52. № 3. – С. 314–325.
7. Заалишвили В.Б., Голик В.И. Геофизическое обеспечение горного производства. // Геология и Геофизика Юга России. – 2024. – Т. 14. № 3. – С. 85–98. DOI: 10.46698/t6803-6487-0430-d.
8. Изменение окружающей среды и климата: в 8 томах. / Редакционно-издательский совет: Н.П. Лаверов и др. – М.: ИФЗ РАН. Т. 1: Сейсмические процессы и катастрофы. – 2008. – 404 с.
9. Кардовский И.В., Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Решение динамической задачи для трехслойной среды с трещинами. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. – №3. – С. 38–43.
10. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред, содержащих систему трещин. // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. Вып. 2. – С. 345–351.
11. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина трехслойных сред с дефектами различной природы. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2012. – Т. 9. № 2. – С. 56–63.
12. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3. № 2. – С. 44–54.
13. Собисевич А.Л. Избранные задачи математической геофизики и вулканологии. М.: ИФЗ РАН, 2010. – 464 с.
14. Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Фатьянов А.Г. Длиннопериодные сейсмогравитационные процессы в литосфере. М.: ИФЗ РАН, 2020. – 228 с.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. / Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
16. Стогний В.В., Заалишвили В.Б., Пономарева Н.Л. Современная геодинамика и сейсмичность Северного Кавказа: проблемы мониторинга. // Геология и геофизика Юга России. – 2022. – Т. 12. № 2. – С. 34–52. DOI: 10.46698/VNC.2022.25.32.003.
17. Стогний П.В., Хохлов Н.И., Петров И.Б. Моделирование волновых процессов в геологических трещиноватых средах с использованием модели Шонберга. // Прикладная математика и механика. – 2020. – Т. 84. № 3. – С. 375–386. DOI: 10.31857/S0032823520030091.
18. Ткачев Г.В. Динамическая задача о вибрации трещины в упругом слое. / Рук. деп. в ВИНТИ 16 июля 1979 г. № 2595-79. Ростов-на-Дону: РГУ, – 1979.
19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topological method of solving boundary-value problems and block elements. // Doklady Physics. – 2013. – Vol. 58. No. 4. – pp. 152–155. DOI: 10.1134/S1028335813040083.
20. Bostrom A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation. // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56. – pp. 383–405.

21. Ceeseeman B.A., Santare M.H., Thermal residual stress and interphase effects on crack-inclusion interaction. // *Journal of Composite Materials*. – 2002. – Vol. 36. No. 5. – pp. 553–569.
22. England A.H. A crack between dissimilar media. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1965. – Vol. 32. – pp. 400–402.
23. Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plate with cracks. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1963. – Vol. 30. – pp. 232–237.
24. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. // *Geophysical Journal International*. – 1999. – Vol. 139. No. 3. – pp. 806–822.
25. Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. Method for studying mixed problems in modeling structurally inhomogeneous materials with coatings. // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1353. Art. No. 012069. DOI: 10.1088/1742-6596/1353/1/012069.
26. Shifrin E.I. Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks. // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2015. – Vol. 56–57. – pp. 181–196. DOI: 10.1016/j.ymssp.2014.11.004.
27. Telyatnikov I.S., Pavlova A.V. Fictitious Absorption Method in a Dynamic Problem for a Layer Weakened by a Crack. // *Advanced Structured Materials*. – 2023. – Vol. 176. – pp. 211–230. DOI: 10.1007/978-3-031-17073-7_14.

References

1. Babeshko V.A. Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory. Moscow. Nauka. 1984. 265 p. (In Russ.)
2. Babeshko V.A. Media with inhomogeneities (the case of a set of inclusions and cracks). *Mechanics of Solids*. 2000. Vol. 373. No. 3. pp. 5–9. (In Russ.)
3. Vatulyan A.O., Baranov I.V. On determining the crack configuration in an anisotropic elastic medium. *Akusticheskij zhurnal*. 2005. Vol. 51. No. 4. pp. 456–462. (In Russ.)
4. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical regions. Moscow. Nauka. 1979. 320 p. (In Russ.)
5. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Diffraction of elastic waves on spatial cracks of arbitrary shape in plan. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1996. Vol. 60. No. 2. pp. 282–289. (In Russ.)
6. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V. Blocking and localization of energy in elastic layered waveguides with defects. *Akusticheskij zhurnal*. 2006. Vol. 52. No. 3. pp. 314–325. (In Russ.)
7. Zaaliishvili V.B., Golik V.I. Geophysical support of mining production. *Geology and Geophysics of Russian South*. 2024. Vol. 14. No. 3. pp. 85–98. DOI: 10.46698/t6803-6487-0430-d. (In Russ.)
8. Environmental and Climate Change: in 8 volumes. Eds. N.P. Laverov et al. Moscow. IPE RAS. Vol. 1. Seismic Processes and Disasters. 2008. 404 p. (In Russ.)
9. Kardovsky I.V., Pryakhina O.D., Smirnova A.V. Solution of a dynamic problem for a three-layer medium with cracks. *Bulletin of universities. North-Caucasian region. Natural Sciences*. 2004. No. 3. pp. 38–43. (In Russ.)
10. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. Integral equations of dynamic problems for multilayer media containing a system of cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005. Vol. 69. Issue 2. pp. 345–351. (In Russ.)
11. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. Construction of determinants of Green's matrix-symbols of three-layer media with defects of different nature. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2012. Vol. 9. No. 2. pp. 56–63. (In Russ.)
12. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. Construction of determinants of Green's matrix-symbols of multilayer media with defects based on the theory of vibration-strength “viruses”. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2006. Vol. 3. No. 2. pp. 44–54. (In Russ.)

13. Sobisevich A.L. Selected problems of mathematical geophysics and volcanology. Moscow. IPE RAS. 2010. 464 p. (In Russ.)
14. Sobisevich L.E., Sobisevich A.L., Fatyanov A.G. Long-period seismogravity processes in the lithosphere. Moscow. IPE RAS. 2020. 228 p. (In Russ.)
15. Handbook of special functions with formulas, graphs, and tables. Eds. M. Abramovits, I. Stigan. Moscow. Nauka. 1979. 832 p. (In Russ.)
16. Stogny V.V., Zaaliishvili V.B., Ponomareva N.L. Modern geodynamics and seismicity of the North Caucasus: problems of monitoring. *Geology and Geophysics of Russian South*. 2022. Vol. 12. No. 2. pp. 34–52. DOI: 10.46698/VNC.2022.25.32.003. (In Russ.)
17. Stogny P.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modeling of wave processes in geological fractured media using the Schonberg model. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 84. No. 3. pp. 375–386. DOI: 10.31857/S0032823520030091. (In Russ.)
18. Tkachev G.V. Dynamic problem of vibration of a crack in an elastic layer. Head of Dep. at VINITI. July 16 1979. No. 2595-79. Rostov-on-Don. RSU. 1979. (In Russ.)
19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topological method of solving boundary-value problems and block elements. *Doklady Physics*. 2013. Vol. 58. No. 4. pp. 152–155. DOI: 10.1134/S1028335813040083.
20. Bostrom A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation. *Applied Mechanics Reviews*. 2003. Vol. 56. pp. 383–405.
21. Ceeseman B.A., Santare M.H., Thermal residual stress and interphase effects on crack-inclusion interaction. *Journal of Composite Materials*. 2002. Vol. 36. No. 5. pp. 553–569.
22. England A.H. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1965. Vol. 32. pp. 400–402.
23. Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plate with cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1963. Vol. 30. pp. 232–237.
24. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*. 1999. Vol. 139. No. 3. pp. 806–822.
25. Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. Method for studying mixed problems in modeling structurally inhomogeneous materials with coatings. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1353. Art. No. 012069. DOI: 10.1088/1742-6596/1353/1/012069.
26. Shifrin E.I. Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015. Vol. 56–57. pp. 181–196. DOI: 10.1016/j.ymssp.2014.11.004.
27. Telyatnikov I.S., Pavlova A.V. Fictitious Absorption Method in a Dynamic Problem for a Layer Weakened by a Crack. *Advanced Structured Materials*. 2023. Vol. 176. pp. 211–230. DOI: 10.1007/978-3-031-17073-7_14.